ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ

Тренировочные варианты (6-8 класс)

Воробьёв В.В.

Василий Воробьёв

Олимпиадные задачи по математике. Тренировочные варианты (6-8 класс)

«Автор»
2026

Воробьёв В. В.

Олимпиадные задачи по математике. Тренировочные варианты (6-8 класс) / В. В. Воробьёв — «Автор», 2026

Этот сборник — настоящий кладезь для юных математиков 6–8 классов, стремящихся к новым вершинам. Мы составили и собрали олимпиадные задачи, охватывающие весь спектр сложности: от легких разминок до по-настоящему головоломных испытаний. Каждая задача разработана так, чтобы стимулировать нестандартное мышление и предлагать разнообразные пути решения Кроме того, мы включили множество увлекательных текстовых задач – на проценты, движение, работу, возраст и другие, где для успеха потребуются оригинальные подходы и хитроумные приемы. Задачи на делимость, комбинаторику и выявление закономерностей в числовых последовательностях помогут расширить практическое применение математических знаний и развить аналитические способности. Этот сборник – разработан для того, чтобы ученики могли самостоятельно исследовать темы, находить решения и, при необходимости, обращаться к подробным объяснениям.

Василий Воробьёв
Олимпиадные задачи по математике. Тренировочные варианты (6-8 класс)

олимпиадные задачи
по математике

Подготовка к школьной и городской олимпиаде по математике

(для учащихся 6, 7 и 8 классов)

Аннотация
Раскройте математический потенциал вашего ребенка с нашим уникальным сборником олимпиадных задач!

Этот сборник — настоящий кладезь для юных математиков 6–8 классов, стремящихся к новым вершинам. Мы составили и собрали олимпиадные задачи, охватывающие весь спектр сложности: от легких разминок до по-настоящему головоломных испытаний. Каждая задача разработана так, чтобы стимулировать нестандартное мышление и предлагать разнообразные пути решения

Особое внимание уделено задачам с геометрическим уклоном, выходящим за рамки стандартных школьных тем. Здесь ваш ребенок научится не только работать с фигурами, но и применять уникальные методы решения, которые откроют ему новые горизонты в геометрии.

Кроме того, мы включили множество увлекательных текстовых задач – на проценты, движение, работу, возраст и другие, где для успеха потребуются оригинальные подходы и хитроумные приемы. Логические задачи, задания на делимость, комбинаторику и выявление закономерностей в числовых последовательностях помогут расширить практическое применение математических знаний и развить аналитические способности.

Сборник структурирован по 9 ключевым темам, каждая из которых сопровождается кратким, но емким теоретическим блоком: определения, основные свойства и формулы – все, что нужно для уверенного старта.

Мы предлагаем два формата задач:

Задачи для самостоятельного решения: Здесь вы найдете подробные, пошаговые решения, которые помогут разобраться в тонкостях и освоить эффективные методы. Это идеальный инструмент для отработки навыков и закрепления материала.

Задачи с ответами: Эти задания, взятые из тренировочных работ, позволят проверить свои силы и подготовиться к реальным олимпиадам.

Этот сборник – не просто набор задач, а полноценный курс опережающего обучения. Он разработан для того, чтобы ученики могли самостоятельно исследовать темы, находить решения и, при необходимости, обращаться к подробным объяснениям. Мы уверены, что представленные приемы и способы решения станут надежными инструментами в арсенале каждого юного математика, подобно тому, как качественные инструменты помогают мастеру создавать шедевры.

В сборник также включены 10 тренировочных работ, которые можно использовать как на уроках, так и для самостоятельной подготовки. Эти мини-олимпиады, сгруппированные по темам, станут отличным подспорьем для тех, кто увлечен математикой и стремится к победам на олимпиадах.

Подарите своему ребенку возможность раскрыть свой математический талант и достичь новых высот!

Содержание

1. Признаки делимости свойства натуральных чисел.

Число делится на 3, тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Например: число 2031 делится на 3 без остатка, так как сумма его цифр $2 + 0 + 3 + 1 = 6$, 6 делится на 3, а число 1022 не делится на 3, так как сумма его цифр $1 + 0 + 2 + 2 = 5$, а 5 не делится на 3.

Число делится на 4, тогда и только тогда, когда две его последние цифры нули или образуют число, делящееся на 4.

Например: 9724 делится на 4 без остатка, так как 24 делится на 4, а число 8442 не делится на 4, так как 42 не делится на 4.

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Найдите наибольшее четырехзначное число, сумма цифр которого равна 17 и которое делится без остатка на 4.

1.2. Найдите наименьшее четырехзначное число, сумма цифр которого равна 21 и которое делится без остатка на 4.

1.3. Найдите наибольшее пятизначное число с неповторяющимися цифрами, сумма которых равна 19, делящееся без остатка на 4.

1.4. Найдите наибольшее пятизначное число с неповторяющимися цифрами, сумма которых равна 12, делящееся без остатка на 3.

1.5. Найдите наименьшее шестизначное число с неповторяющимися цифрами, сумма которых равна 18, делящееся без остатка на 3.

1.6. Найдите наименьшее семизначное число, в записи которого используются только три цифры (0, 3, 5), делящееся без остатка на 4.

1.7. Найдите наименьшее семизначное число, в записи которого используются только три цифры (0, 1, 3), делящееся без остатка на 3.

1.8. Кирилл записал на доске несколько чисел: 3524, 3568, 3704, 3748, …, 9876 — и назвал их «фиолетовыми». Числа 1065, 4275, 5274, 6352, 7744, … «фиолетовыми» не являются. Найдите наименьшее «фиолетовое» число, которое больше 5184.

1.9. Егор записал в своей тетради несколько четырёхзначных чисел: 2133, 2139, 2241, 2247, 2355, …, 2799, 4155, 4263, …, 6393, …, 8199. Одноклассник Максим увидел этот ряд и сказал: «Всего чисел, имеющих такие же свойства, двадцать восемь». Установите, прав ли Максим.

1.10. Николай Васильевич, учитель математики в 5 классе, записал на доске несколько чисел: 183012, 132916, 104636, …, 719120, … — и сказал ученикам: «Найдите наименьшее и наибольшее числа, которые имеют те же свойства, что и данные». Ученик Семён, недолго думая, назвал числа 101000 и 789012. Установите, верно ли Семён назвал эти числа.

1.11. На доске написаны две нечётные цифры и цифра 2. Михаил, используя только эти три цифры, составил четырёхзначные числа, делящиеся на 4. Затем он нашёл сумму всех этих чисел и получил 31120. Какие две нечётные цифры были написаны на доске?

1.12. На доске написаны две нечётные цифры и цифра 6. Александр, используя только эти три цифры, составил четырёхзначные числа, делящиеся на 4. Затем он нашёл сумму всех этих чисел и получил 31060. Какие две нечётные цифры были написаны на доске?

1.2. Признаки делимости натуральных чисел на 6, на 8, на 9, на 11, на 25

Число делится на 6, тогда и только тогда, когда это число одновременно делится и на 2 и на 3. Например: 49314 *делится на 6 без остатка, так как 4 последняя цифра чётная, и сумма цифр равна 21, а 21 делится на 3.*

Число делится на 8, тогда и только тогда, когда три его последние цифры нули или образуют число, делящееся на 8.

Например: 97352 делится на 8 без остатка, так как 352 делится на 8,
а число 84442 не делится на 8, так как 442 не делится на 8.

Число делится на 9, тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

Например: число 7092 делится на 9 без остатка, так как сумма его цифр 7 + 0 + 9 + 2= 18 , 18 делится на 9, а число 2055 не делится на 9, так как сумма его цифр 2+ 0 + 5 + 5= 12, а 12 не делится на 9.

Число делится на 10, тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0

Например: *7930 делится на 10 без остатка, так как 0 последняя цифра, а число 9442 не делится на 10, так как последняя цифра 2.*

Число делится на 11, тогда и только тогда, когда сумма цифр, стоящих на четных местах равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах, либо эти суммы отличаются или на 11 или на 22, или на 33, или на 11n, где n - натуральное число. Например: число 792 делится на 11 без остатка, так как 7+ 2=9, 9=9. Ч*исло 91905 делится на 11 без остатка, так как разность сумм цифр* (9 + 9 + 5)- (1+ 0)=23-1=22, а 22 *делится на 11 без остатка.*

Число делится на 25, тогда и только тогда, когда две его последние цифры нули или образуют число, делящееся на 25.

Например: 69775 делится на 25 без остатка, так как 75 делится на 25,
а число 48455 не делится на 25, так как 55 не делится на 25.

Задачи для самостоятельного решения

1.13. Найдите наибольшее четырехзначное число, сумма цифр которого равна 19, а само число делится без остатка на 8.

1.14. Найдите наименьшее пятизначное число, сумма цифр которого равна 23, а само число делится без остатка на 25.

1.15. Найдите наибольшее пятизначное число с неповторяющимися цифрами, сумма цифр которого равна 17, а само число делится без остатка на 11.

1.16. Найдите наименьшее пятизначное число с неповторяющимися цифрами, сумма цифр которого равна 22, а само число делится без остатка на 25.

1.17. Найдите наименьшее шестизначное число с неповторяющимися цифрами, сумма цифр которого равна 19, а само число делится без остатка на 25.

1.18. Найдите наибольшее семизначное число, в котором используются только цифры 0, 3 и 5, если это число делится без остатка на 9.

1.19. Максим записал несколько четырехзначных чисел в своей тетради: 1375, 1925, 2475, 3575, 4125, 4675, … Одноклассник Александр увидел этот ряд чисел и сказал: «Всего таких чисел, имеющих аналогичные свойства, — 17». Установите, прав ли Александр.

1.20. Екатерина Васильевна, учитель математики в 6 классе, записала на доске три цифры: 0, 3, 4 — и сказала ученикам: «Найдите наименьшее число, состоящее только из этих трех цифр, если сумма его цифр равна 29, само оно делится без остатка на 55, а также определите количество нулей в этом числе». Ученик Кирилл сообщил: «Это число содержит 11 нулей». Установите, верно ли Кирилл определил количество нулей.

1.21. На доске написано трехзначное число, которое делится на 11. Сумма его цифр равна 13, а произведение цифр делится на 18. Найдите это число.

1.22. На доске написано четырехзначное число, которое делится на 66. Сумма его цифр больше 22, две последние цифры составляют число, которое делится на 7, а все цифры в числе различны. Найдите это четырехзначное число.

1.23. На доске написано трехзначное число, которое делится на 22. Сумма его цифр равна 19, а произведение цифр делится на 9. Найдите это число.

1.24. На доске написано четырехзначное число, которое делится на 44. Сумма его цифр равна 26, а произведение цифр делится на 32. Найдите это число.

1.25. Дано семизначное число, первая цифра которого — 2. Если эту цифру перенести в конец, то получится новое семизначное число, делящееся на 4. Если к полученному числу прибавить исходное, то получится восьмизначное число 11 638 437. Найдите исходное семизначное число.

1.3. Свойства делимости натуральных чисел

Для любых натуральных чисел m, n и l, которые связаны равенством:
m+n = l выполняются свойства делимости:
Если m делится на k и l делится на k, то и n делится на k (где k- натуральное число)

Задачи для самостоятельного решения

1.26. На рисунке 1 показана геометрическая фигура, которая состоит из 12 маленьких, равных между собой квадратов и одного большого. Найдите периметр большого квадрата, если периметр всей фигуры равен 124 см и длины сторон квадратов принимают целые значения в сантиметрах.

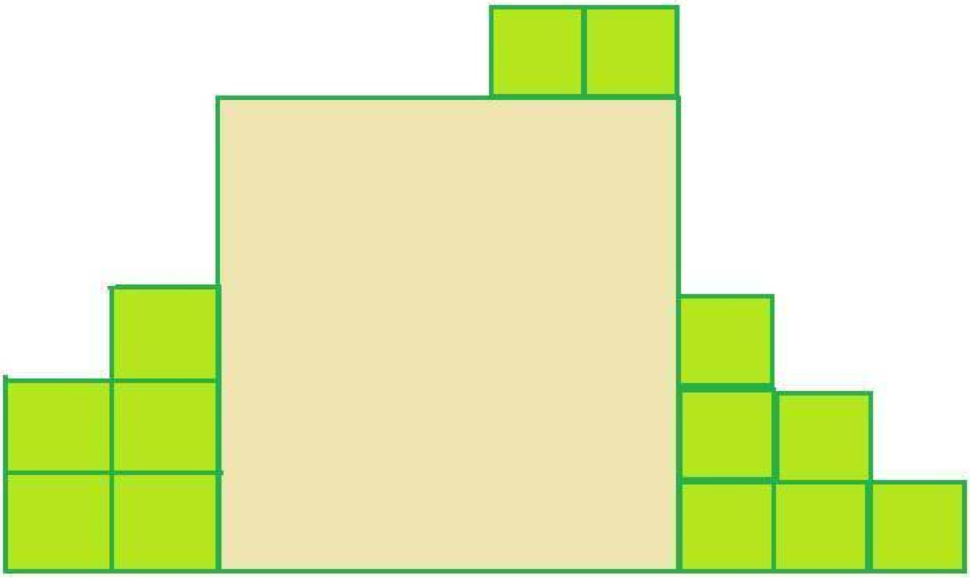


Рис.1.

1.27. На рисунке 2 показана геометрическая фигура, которая состоит из 8 маленьких равных квадратов и двух больших, равных между собой. Найдите периметр большого квадрата, если периметр всей фигуры равен 126 см и длины сторон квадратов принимают целые значения в сантиметрах.

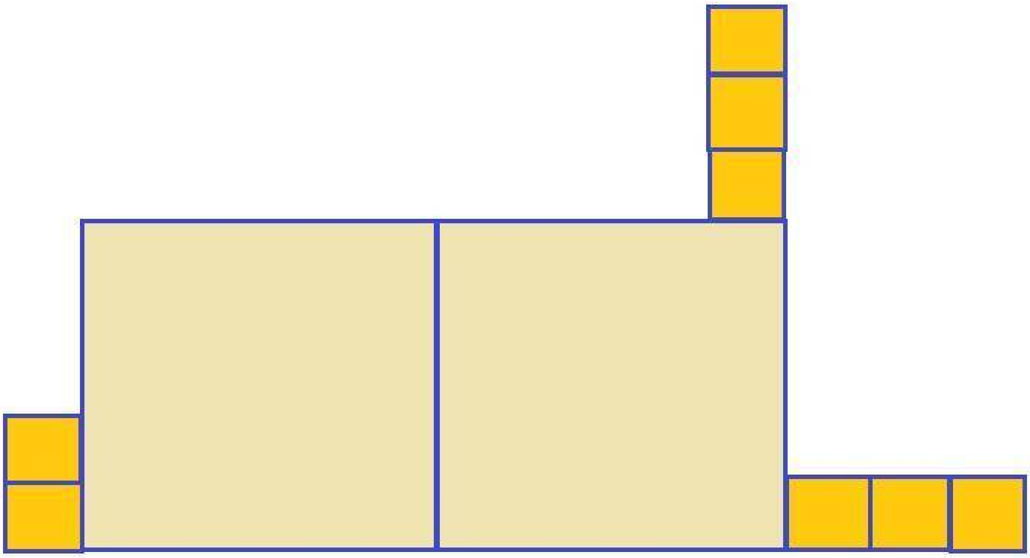


Рис.2.

1.28. На рисунке 3 показана геометрическая фигура, которая состоит из 5 маленьких равных квадратов и трёх больших, равных между собой квадратов. Найдите периметр большого квадрата, если периметр всей фигуры равен 150 см и длины сторон квадратов принимают целые значения в сантиметрах.

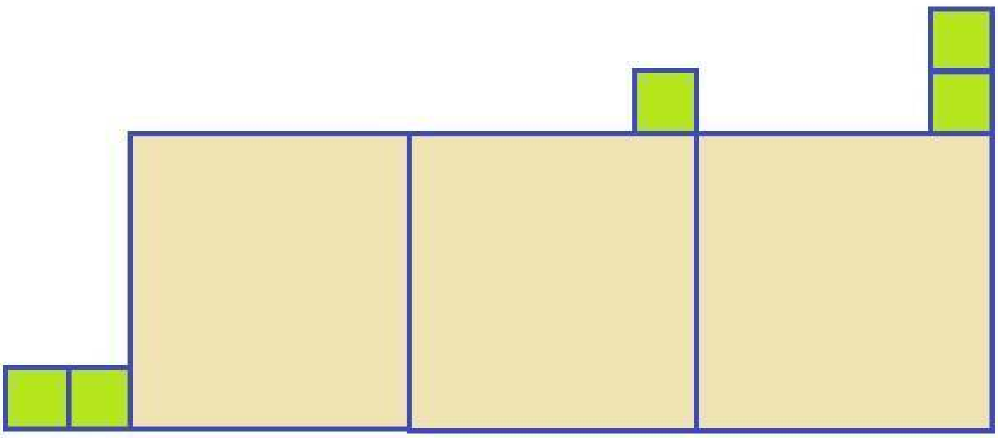


Рис.3.

1.29. На рисунке 4 показана геометрическая фигура, которая состоит из 7 маленьких равных квадратов и двух больших, но разных размеров. Найдите площадь всей фигуры, если периметр этой фигуры равен 88 см и длины сторон квадратов принимают целые значения в сантиметрах.

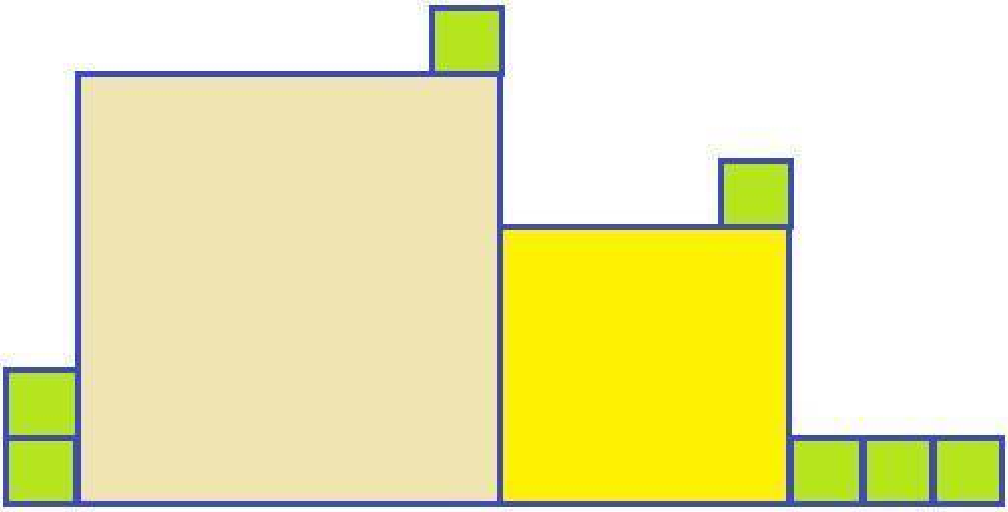


Рис.4.

1.30. На рисунке 5 показана геометрическая фигура, которая состоит из 9 маленьких равных квадратов и трёх больших, равных между собой квадратов. Найдите периметр большого квадрата, если периметр всей фигуры равен 125 см и длины сторон квадратов принимают целые значения в сантиметрах.

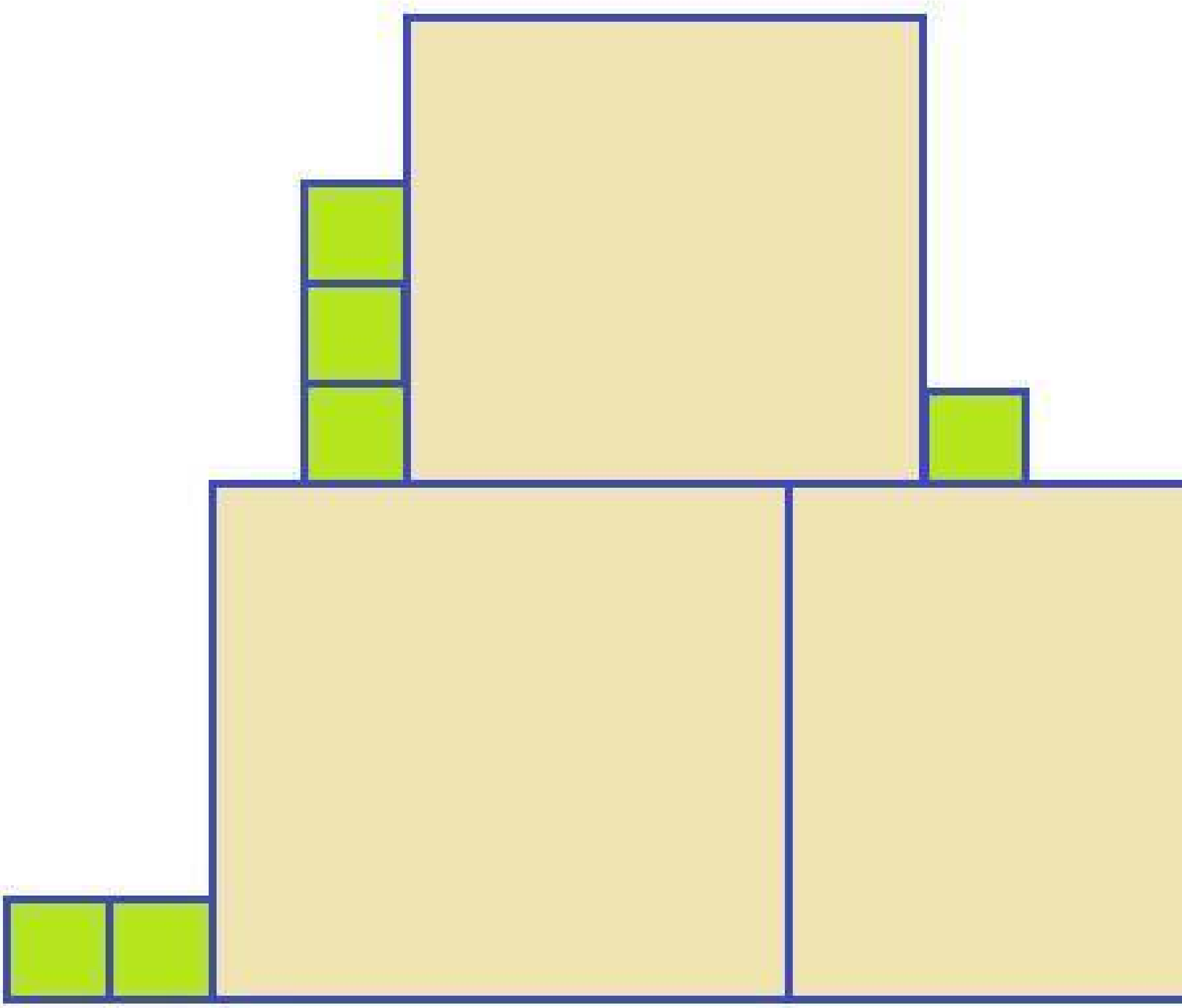


Рис.5.

1.31. На рисунке 6 показана геометрическая фигура, которая состоит из 11 маленьких равных квадратов и четырёх больших, равных между собой квадратов. Найдите периметр большого квадрата, если периметр всей фигуры равен 324 см и длины сторон квадратов принимают целые значения в сантиметрах.

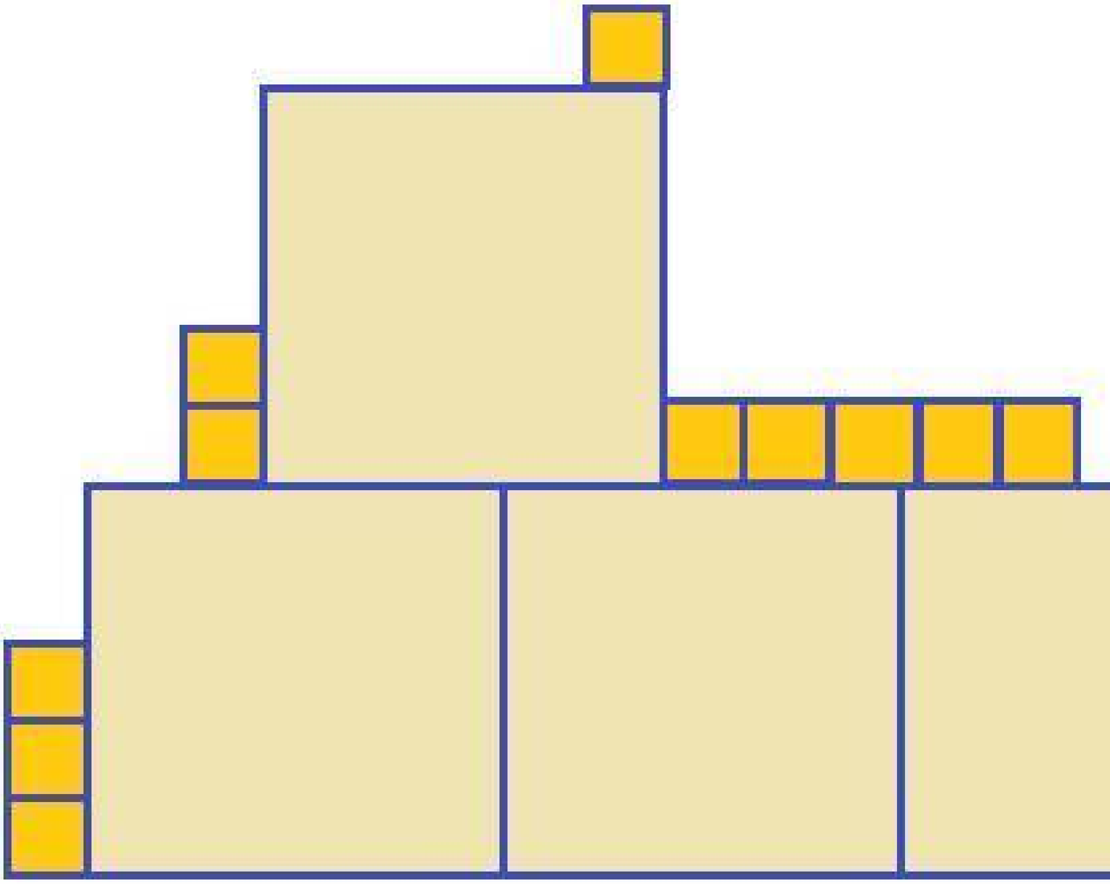


Рис.6

1.32. На рисунке 7 показана геометрическая фигура, которая состоит из 7 маленьких равных квадратов и шести больших, равных между собой квадратов. Найдите площадь всей фигуры, если периметр этой фигуры равен 408 см и длины сторон квадратов принимают целые значения в сантиметрах.

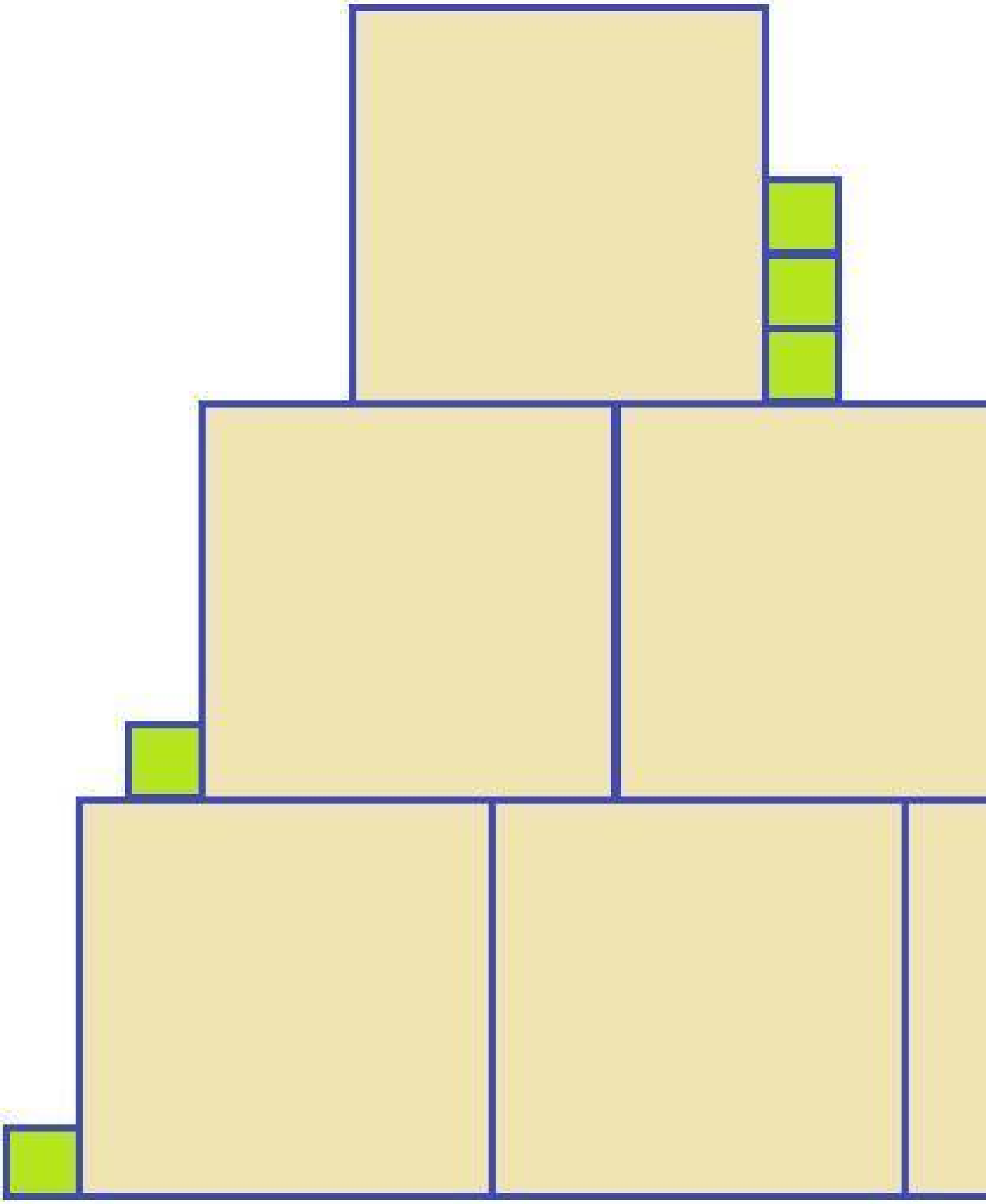


Рис.7.

1.33. На рисунке 8 показана геометрическая фигура, которая состоит из 8 маленьких равных квадратов и четырёх больших, равных между собой квадратов. Найдите площадь большого квадрата, если периметр всей фигуры равен 300 см и длины сторон квадратов принимают целые значения в сантиметрах.

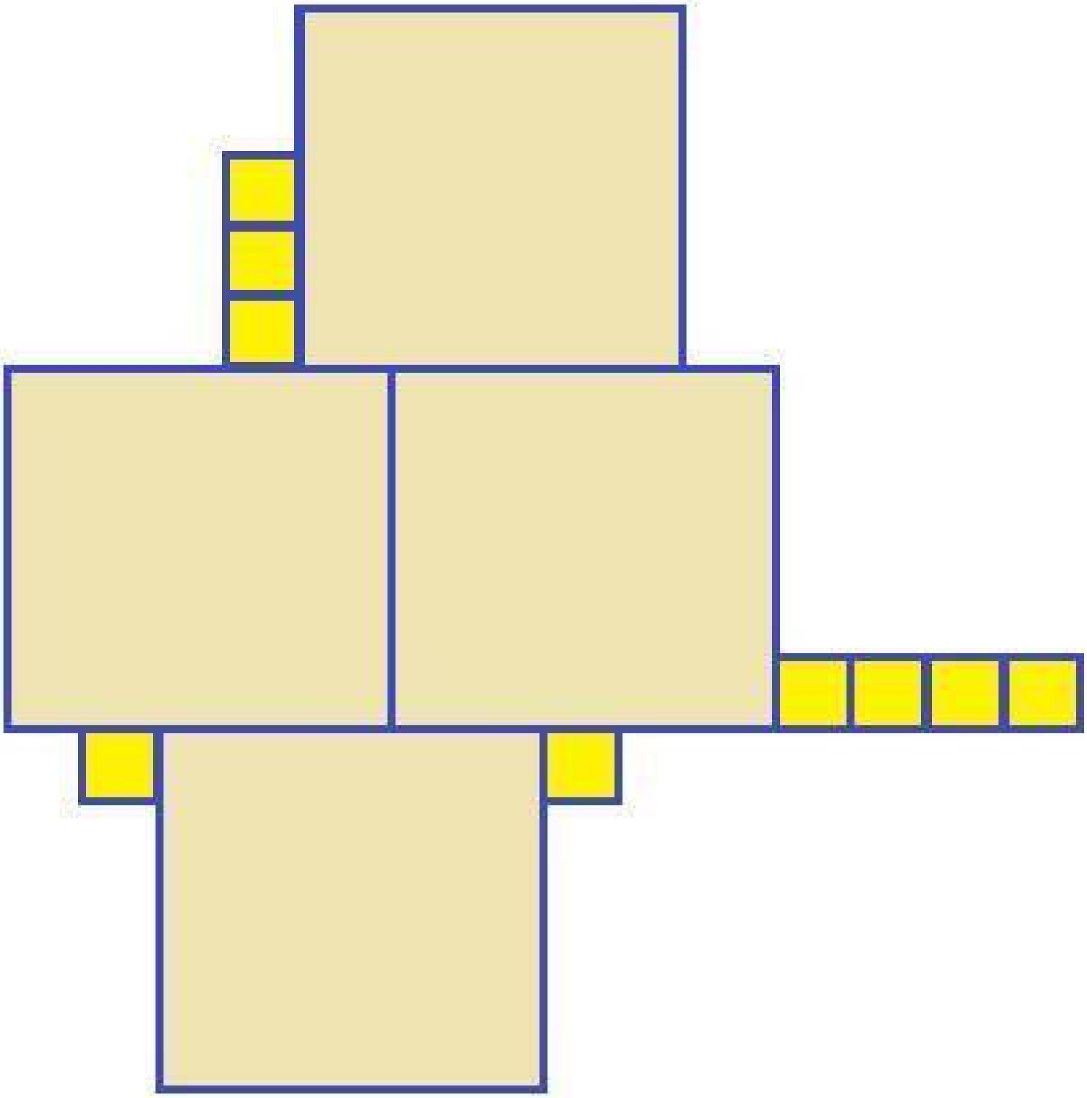


Рис.8.

1.34. На рисунке 9 показана геометрическая фигура, которая состоит из 8 маленьких равных квадратов, четырех больших равных между собой квадратов и еще трех больших равных между собой квадратов. Найдите площадь всей фигуры, если периметр этой фигуры равен 510 см и длины сторон квадратов принимают целые значения в сантиметрах.

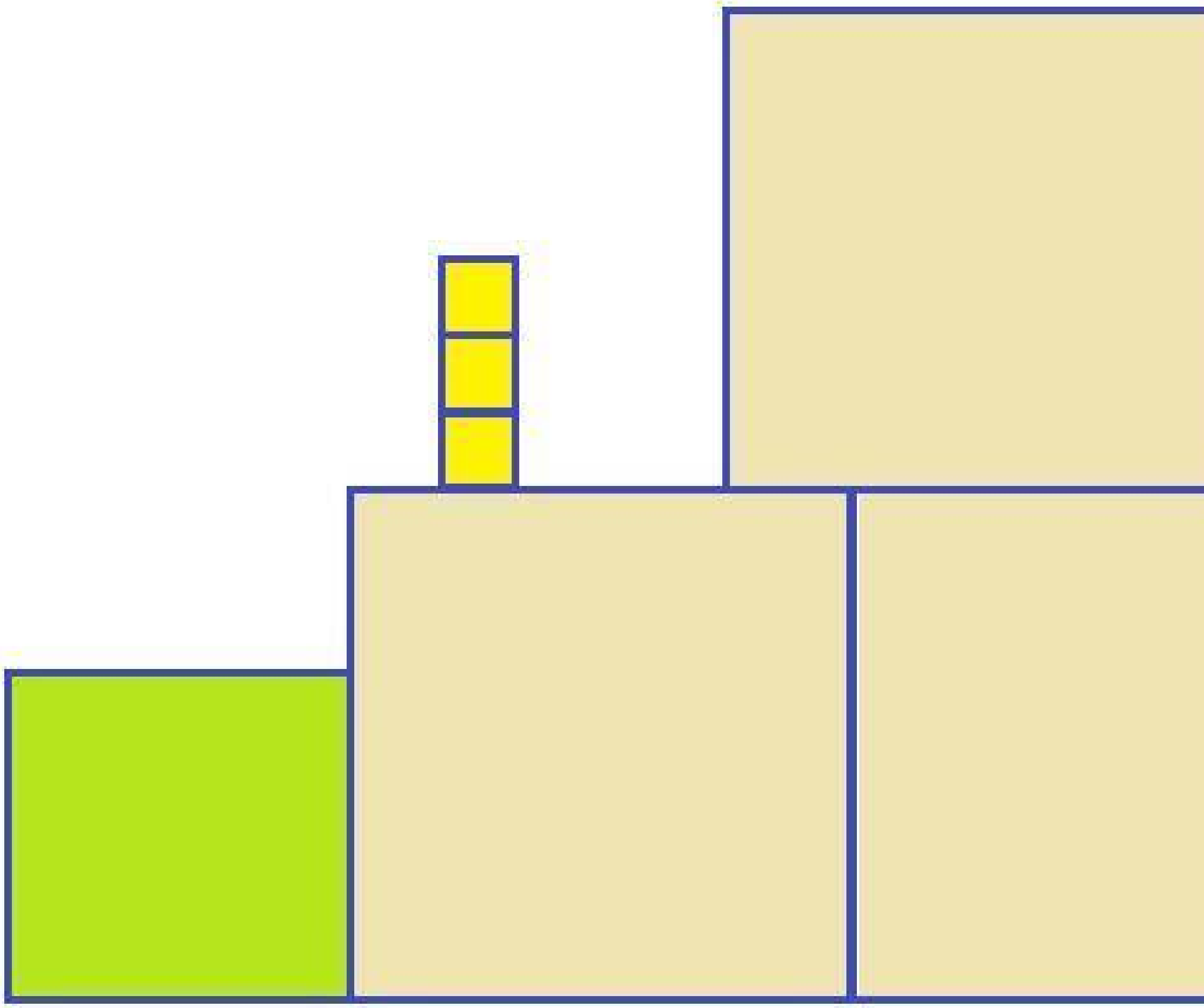


Рис.9.

1.35. На рисунке 10 показана геометрическая фигура, которая состоит из 6 маленьких равных квадратов, 5 больших равных между собой квадратов и еще пяти средних по величине равных между собой квадратов. Найдите площадь всей фигуры, если периметр этой фигуры равен 336 см и длины сторон квадратов принимают целые значения в сантиметрах.

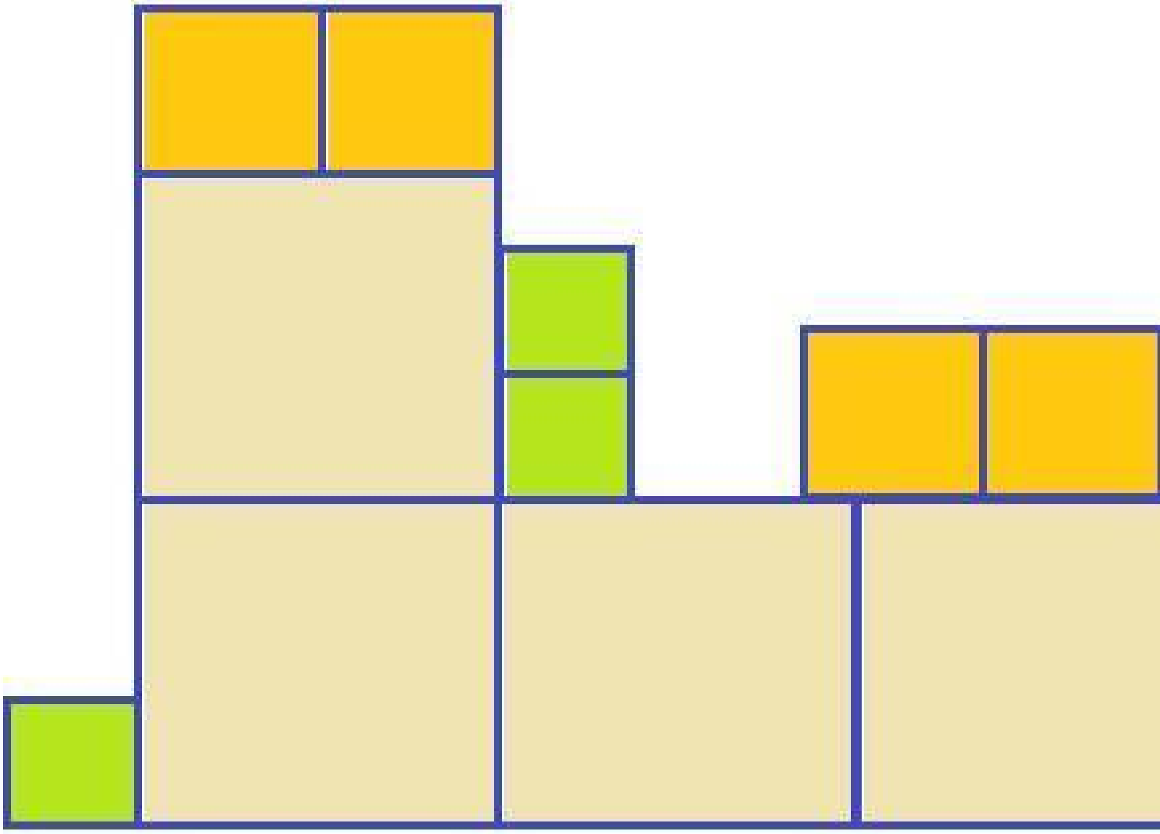


Рис.10.

1.36. Таня, ученица 6 класса, в магазине канцелярских товаров «РТ» купила несколько общих тетрадей, карандашей и фломастеров. За всю покупку Таня заплатила 252 рубля. Определите, сколько общих тетрадей купила Таня, если одна общая тетрадь стоила 28 рублей, карандаш — 7 рублей, а фломастер — 22 рубля, и еще известно, что карандашей она купила не больше 4.

1.37. Владислав, вожатый в летнем школьном лагере, отвечающий за спортивные занятия, в спортивном магазине «Мячи для игры и не только…» купил несколько гантелей по 3 кг, теннисные шарики и волейбольные мячи. За всю покупку Владислав заплатил 19 030 рублей. Определите, сколько волейбольных мячей купил Владислав, если комплект из двух гантелей по 3 кг стоил 880 рублей, набор из 45 теннисных шариков — 495 рублей, а один волейбольный мяч стоил 1400 рублей.

1.38. На складе компьютерной техники имеются три вида клавиатур: мембранная, механическая и ножничная. Они хранятся на специальных стеллажах и занимают несколько полок. Мембранная клавиатура хранится на отдельном стеллаже на 71 полке, причем на каждой полке находится равное количество клавиатур данного вида. Механическая клавиатура хранится на 45 полках другого стеллажа, а ножничная — на 90 полках третьего стеллажа. Всего на этом складе компьютерной техники насчитывается 6075 клавиатур. Определите количество мембранных клавиатур на одной полке, если известно, что для каждого вида клавиатур предусмотрено свое число штук на полке, и на каждой полке лежит не меньше 20 клавиатур.

1.39. В фруктовом саду имени И. В. Мичурина выращивают, кроме обычных сортов яблонь, еще колонновидные сорта: Мэйпол, Московское ожерелье, Васюган. Яблони каждого сорта растут на участках прямоугольной формы. На участке, где растут яблони сорта Мэйпол, в одном ряду 24 яблони; на участке с сортом Московское ожерелье в одном ряду 16 яблонь, а на участке с сортом Васюган в одном ряду 37 яблонь. Определите, сколько всего в этом фруктовом саду яблонь сорта Васюган, если общее число яблонь колонновидных сортов составляет 1056 штук, и известно, что число рядов на каждом участке не меньше 10.

1.40. Докажите, что количество натуральных чисел от 18 до 10 000, в которых нет ни одной цифры 3, ни одной цифры 4, ни одной цифры 5, ни одной цифры 6, делится на 11.

2.Алгоритм Евклида. НОД и НОК.

Алгоритм Евклида. При нахождении НОД(m,n), пусть m больше n:

Алгоритм Евклида нахождение наибольшего общего делителя двух чисел m *и* n (*НОД* m,n)*:* 1. *Число* m *делим* n (r_1 - остаток от деления); 2. *Число* n *делим* r_1 (r_2 - остаток от деления); 3. *Число* r_1 *делим* r_2 (r_3 - остаток от деления); 4. *Число* r_2 *делим* r_3 (r_4 - остаток от деления) и так далее, если число r_{n-1} r_n , то НОД(m,n)= r_n, но если *m делится на n без остатка, то НОД(m, n)= n.*

Рассмотрим алгоритм Евклида на примерах:

Пример 1. Найти наибольший общий делитель для чисел 27 648 и 25 600.

НОД (27 648, 25 600) = ? (используем алгоритм Евклида)

Большее из данных чисел поделим на наименьшее: при делении 27 648 на 25 600 получили, что неполное частное равно 1, а остаток от деления равен $r_1 = 2048$.

Делитель 25 600 поделим на первый остаток 2048 ($r_1 = 2048$) и получим, что неполное частное равно 12, а остаток от деления равен $r_2 = 1024$.

Первый остаток 2048 поделим на второй остаток 1024 $r_2 = 1024$ и получим, что частное равно 2, а остаток от деления равен $r_3 = 0$.

Следовательно, наибольший общий делитель чисел 27 648 и 25 600 равен 1024, так как делили на 1024, а в остатке получили 0.

Ответ: НОД (27 648, 25 600) = 1024.

Пример 2. Найти наибольший общий делитель для чисел 123783 и 116281.

НОД (123783; 116281)= ? (используем алгоритм Евклида)

Большее из данных чисел поделим на наименьшее: при делении 123783 на 116281 получили, что неполное частное равно 1, а остаток от деления равен $r_1 = 7502$.

Делитель 116281 поделим на первый остаток 7502 ($r_1 = 7502$) и получим, что неполное частное равно 15, а остаток от деления равен $r_2 = 3751$.

Первый остаток 7502 поделим на второй остаток 3751 $r_2 = 3751$ и получим, что частное равно 2, а остаток от деления равен $r_3 = 0$.

Следовательно, наибольший общий делитель чисел 123783 и 116281 равен 1024, так как делили на 1024, а в остатке получили 0.

Ответ: НОД (123783; 116281) =3751.

2.1. Вычислите:

2.2. Вычислите:

2.3. Вычислите:

2.4. Вычислите:

2.5. Вычислите:

2.6.Вычислите:

2.7. Вычислите:

2.8. Вычислите:

2.9. Вычислите:

2.10. Вычислите: **2.11.**Вычислите:

2.12. Родительский комитет пятого класса закупил 203 мандарина и 957 конфет для детских новогодних подарков. Сколько учащихся в этом пятом классе, если все подарки одинаковые, если число подарков равно числу учащихся в этом пятом классе и сколько конфет в одном подарке?

2.13.В цветочном магазине «Флористика 24» имеется 1603 красных роз и 1832 белых лилий. Из этих цветов составляют одинаковые букеты. Какое наименьшее число таких букетов можно составить, если в одном букете всего цветов не больше 17? И ещё определите, сколько роз в одном букете.

2.14.Наибольший общий делитель для двух четырёхзначных чисел А и В равен 264. Найдите эти числа, если

НОК(*a,b*) *- это наименьшее общее кратное двух натуральных чисел a и b.Это наименьшее число, которое делится на каждое из данных чисел без остатка.*

Пример: НОК(36 и 45)=180

36=3322, 45=533 , тогда НОК(36 и 45)= 33225=180.

Пример: НОК(341 и 495)=?

341=3111, 495=53311, тогда НОК(36 и 45)= 1133531=15345.

Свойства: 1)

2.15. Игорь получил за год несколько оценок по русскому языку, всего их было меньше 70. Третья часть из них - пятёрки, шестая часть - четвёрки, одиннадцатая часть - двойки. А сколько Игорь получил троек?

2.16. Найдите такие последовательные натуральные числа: a, b, c и d если

$НОК(a,b) - НОК(c,d)=102$.

2.17. Найдите такие последовательные натуральные числа: a, b, c и d если

$НОК(a,c) - НОК(b,d)=219$.

2.18. Найдите такие натуральные числа a и b, если

$НОК(a,b) = 3311$, $НОД(a,b)=43$, $a>43$ и $b>43$.

3.Текстовые задачи. Проценты. Работа. Движения. Смеси и сплавы. Возраст. Задачи для самостоятельного решения.

. **3.1.** После сушки винограда процентное содержание воды в нем уменьшилось в 5 раз, а масса содержащейся в винограде воды уменьшилась в 21 раз. Во сколько раз масса винограда больше массы изюма, полученного при сушке?

3.2. Имеется два сплава с разным содержанием меди. Из них получили третий сплав, в котором процентное содержание меди в 2,5 раза больше, чем во втором сплаве, и в 1,2 раза меньше, чем в первом. Масса чистой меди во втором сплаве в 9 раз меньше массы чистой меди в первом. Во сколько раз масса третьего сплава больше массы второго?

3.3. В физико-математической школе №2332 в конце учебного года процент учащихся, изучающих китайский язык, был в 2,5 раза меньше процента учащихся, изучающих английский язык, и в 4 раза больше процента учащихся, изучающих арабский язык. К началу нового учебного года 0,1 от числа учащихся, изучавших английский язык, перешли в гимназию №2112, а из других школ в физико-математическую школу пришло некоторое число учеников, изучающих китайский язык. В итоге число учащихся, изучающих английский язык, стало в 1,35 раза больше числа учащихся, изучающих китайский язык. Определите, во сколько раз количество учащихся, изучающих китайский язык, больше количества учащихся, изучающих арабский язык, в новом учебном году.

3.4. В питомнике №1 выращивают цветы для магазинов «Ф24». В феврале процент роз от общего числа цветов в питомнике был в 4 раза больше процента хризантем и в 2 раза больше процента орхидей. В марте, после того как 0,2 всех роз из питомника №1 отправили на продажу, а в питомнике №2 приобрели некоторое количество молодых орхидей, число роз стало в 1,28 раза больше числа орхидей. Определите, во сколько раз число орхидей больше числа хризантем в питомнике №1 в марте.

3.5. Имеется два раствора соли. Масса первого раствора в 2 раза больше массы второго; также известно, что процентное содержание соли во втором растворе в 3,2 раза меньше, чем в первом. Если смешать эти растворы и добавить чистую воду, масса которой равна массе первого раствора, получится третий раствор с концентрацией соли $m\%$. Если же смешать исходные растворы, но вместо воды добавить раствор, масса которого равна массе первого, а процентное содержание соли в 3,7 раза больше, чем во втором, получится раствор с концентрацией $n\%$. Найдите отношение $m : n$.

3.6. Прямоугольник разбит на равные квадраты. Квадраты раскрасили либо в жёлтый цвет, либо в оранжевый, либо в зелёный, либо в белый. Известно, что процент числа жёлтых квадратов в 2,5 раза меньше процента числа зелёных и в 1,(1) раза больше процента числа оранжевых квадратов. Если шестую часть всех белых квадратов перекрасить в оранжевый цвет, то процент числа оранжевых квадратов будет в 2 раза больше процента числа белых. Во сколько раз число зелёных квадратов больше числа белых квадратов после перекраски?(Рис.11.)

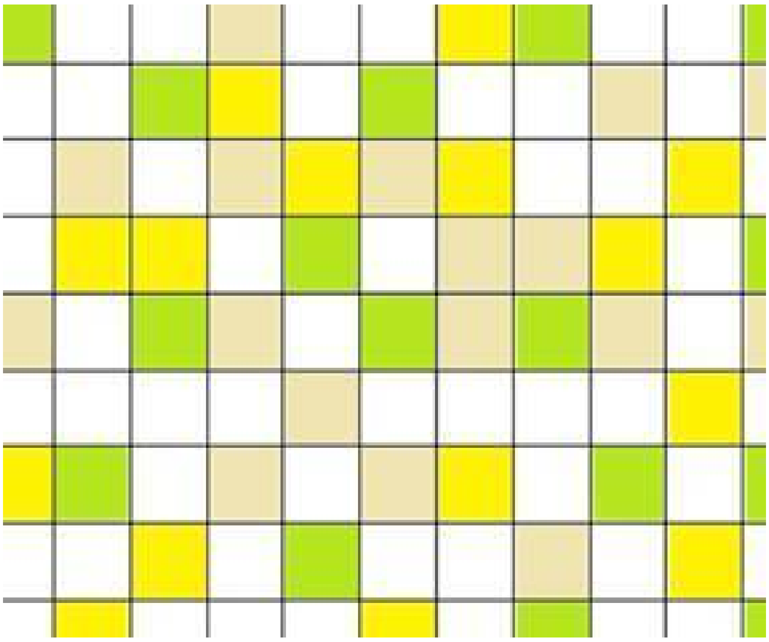


Рис.11.

3.7. На день рождения ученице 6 класса Вике подарили набор шоколадных конфет. Недолго думая, она все их раздала своим подружкам: Тане, Маше, Оле и Кате, особо не подсчитывая, кому сколько. И оказалось, что процент числа конфет у Тани в 2 раза больше процента числа конфет у Маши и в 1,5 раза меньше процента числа конфет у Оли. Так как Катя увидела, что у Маши намного меньше конфет, чем у остальных, то восьмую часть своих конфет она передала Маше — тогда число конфет у Оли стало в 2 раза больше, чем у Маши. Определите отношение количества конфет, которые остались у Кати, к количеству конфет, которые получила Таня от Вики.

3.8. В семье Николаевых только три сына. Известно, что отец старше младшего сына в 8 раз и старше среднего сына на 31 год. Через сколько лет старший сын в семье Николаевых будет младше отца в 2 раза, если в семье Николаевых дети рождались через каждые четыре года?

3.9. В семье Сергеевых только четыре сына. Известно, что отец старше младшего сына в 7 раз и старше его на 36 лет. Через сколько лет старший сын в семье Сергеевых будет младше отца в 2 раза, если в этой семье дети рождались через каждые три года?

3.10. В семье Виноградовых только двое детей. Мама старше дочери в 5 раз и старше сына на 44 года. Через сколько лет мама в семье Виноградовых будет старше сына в 3 раза, если сыну в данное время больше 2 лет, но меньше 8 лет?

3.11. По течению реки Николай на моторной лодке по реке «Быстрой» проплыл некоторое расстояние за t часов, а на обратный путь он затратил времени в 2 раза больше. Определите, во сколько раз собственная скорость моторной лодки, на которой плыл Николай больше скорости течения реки «Быстрой».

3.12.Два велосипедиста Егор и Кирилл выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов Р и Т. Егор выехал из пункта Р и прибыл в пункт Т через часов после встречи, а Кирилл, выехал из пункта Т и прибыл в пункт Р через часов после встречи. Найдите отношение Если Егор, затратил на весь путь 21 час, ещё известно, что и -натуральные числа.

3.13. Три велосипедиста — Матвей, Сергей и Николай — на тренировочных сборах проводили тренировку на круговой трассе. Известно, что Сергей сделал 12 кругов, а Матвей — 16 кругов. Николай сделал 20 кругов и затратил в 1,(09375) раза больше времени, чем Матвей на 16 кругов. Определите, во сколько раз Николай затратил времени больше на 20 кругов, чем Сергей на 12 кругов, если известно, что средняя скорость Матвея больше средней скорости Сергея на 2 км/ч и на 2 км/ч меньше, чем средняя скорость Николая.

3.14. Организаторы водного туризма на горной реке Белой, проверяя трассу, проходят путь на моторной лодке два раза: по течению реки и против течения. Расстояние между пунктами А и В равно расстоянию между пунктами С и В. Скорость течения реки между пунктами А и В в 2 раза меньше, чем скорость течения между пунктами В и С. Расстояние между пунктами С и D в 2 раза больше, чем расстояние между пунктами А и В, а скорость течения реки там в 2,5 раза больше, чем между пунктами А и В. Время, затраченное на путь между пунктами А и В по течению реки и обратно, в 1,(03125) раза меньше, чем время, затраченное между пунктами В и С по течению и обратно. Во сколько раз время, затраченное на путь между пунктами С и D по течению и обратно, больше, чем время, затраченное между пунктами А и В по течению и обратно, если собственная скорость моторной лодки всегда одинакова?

3.15. На рисунке 12 показана геометрическая фигура, которая состоит из 7 маленьких равных квадратов и двух больших (разных размеров). Известно, что площадь самого большого квадрата составляет 46% от площади всей фигуры. Если к данной фигуре добавить ещё один квадрат среднего размера (Рис. 13), то его площадь составит 20% от площади всей новой фигуры. Найдите отношение площади 10 маленьких квадратов к площади всей третьей фигуры, если ко второй фигуре добавить ещё 3 маленьких квадрата (Рис. 14).

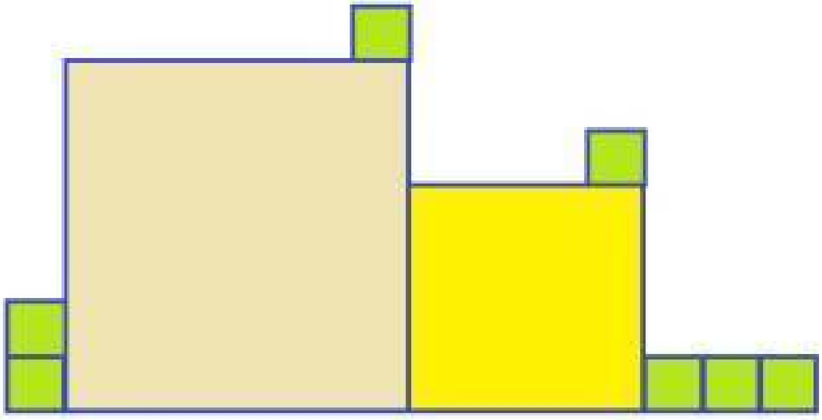


Рис.12.

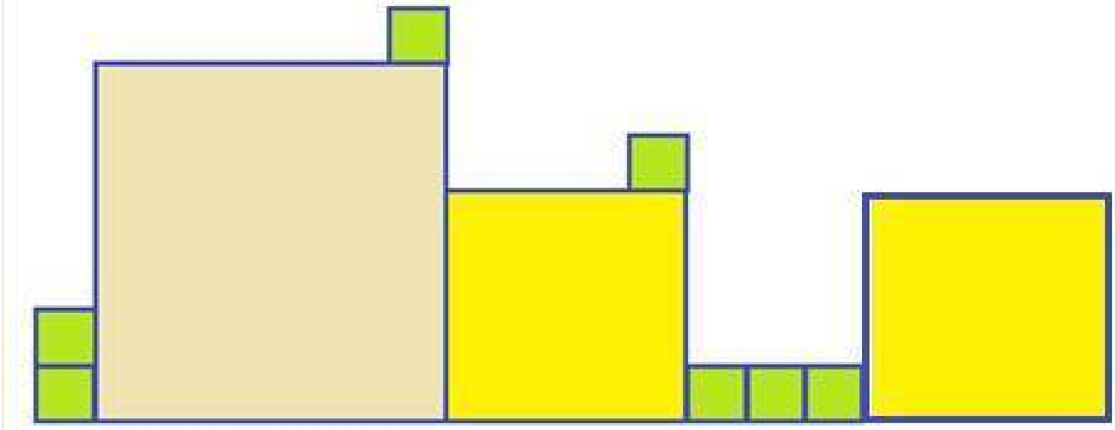


Рис.13.

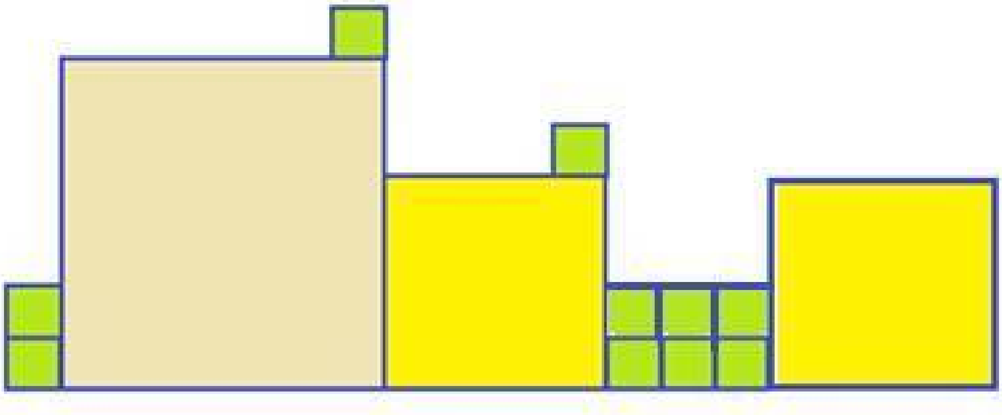


Рис.14.

3.16. Борис и Кирилл готовились к школьной олимпиаде по математике и использовали сборник олимпиадных задач. По чётным дням Борис решал задачи 2 часа, а Кирилл — 3 часа. Каждый чётный день количество решённых задач составляло двенадцатую часть всех задач в сборнике. По нечётным дням Борис решал задачи 3 часа, а Кирилл — 1 час. Каждый нечётный день количество решённых задач составляло восемнадцатую часть всех задач в сборнике. Борис за один час решал больше задач, чем Кирилл. Определите, на сколько задач больше за один час решал Борис, чем Кирилл, если количество задач в этом сборнике больше 504, но меньше 543.

3.17 Егор и Сергей готовились к муниципальной олимпиаде по физике и использовали сборник олимпиадных задач. По чётным дням Егор решал задачи 3 часа, а Сергей — 2 часа. Каждый чётный день количество решённых задач составляло двадцать четвёртую часть всех задач в сборнике. По нечётным дням Егор решал задачи 4 часа, а Сергей — 3 часа. Каждый нечётный день количество решённых задач составляло восемнадцатую часть всех задач в сборнике. Егор за один час решал меньше задач, чем Сергей. На сколько задач больше за один час решал Сергей, чем Егор, если количество задач в этом сборнике больше 782, но меньше 802, и известно, что каждый из них за один час решал более 3 задач?

3.18 На рисунке 15 показана геометрическая фигура, которая состоит из 8 маленьких равных квадратов, двух самых больших равных между собой квадратов и ещё трёх средних равных между собой квадратов. Известно, что площадь самого большого квадрата составляет 30% от площади всей фигуры. Если к данной фигуре добавить ещё один квадрат среднего размера (Рис. 16), то его площадь составит 10% от площади новой фигуры. Найдите отношение площади 10 маленьких квадратов к площади третьей фигуры, если к первой фигуре добавить ещё 2 маленьких квадрата (Рис. 17).

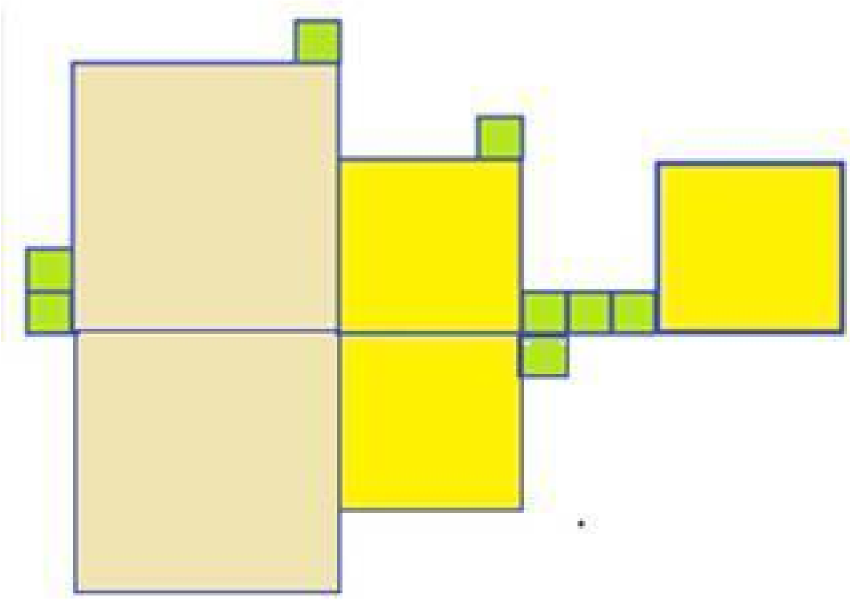


Рис.15.

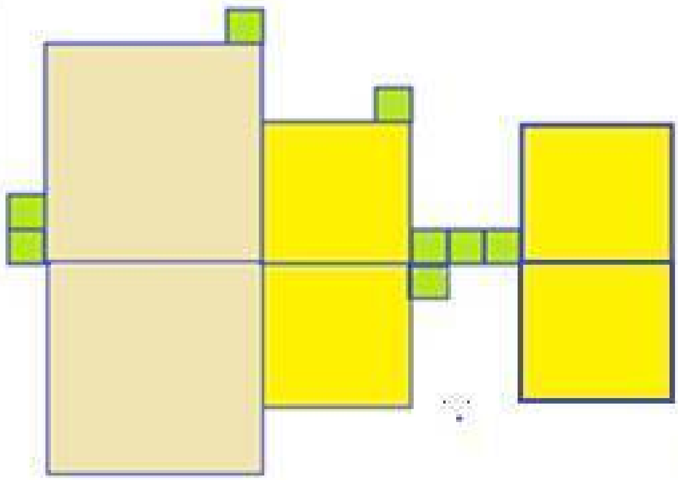


Рис.16.

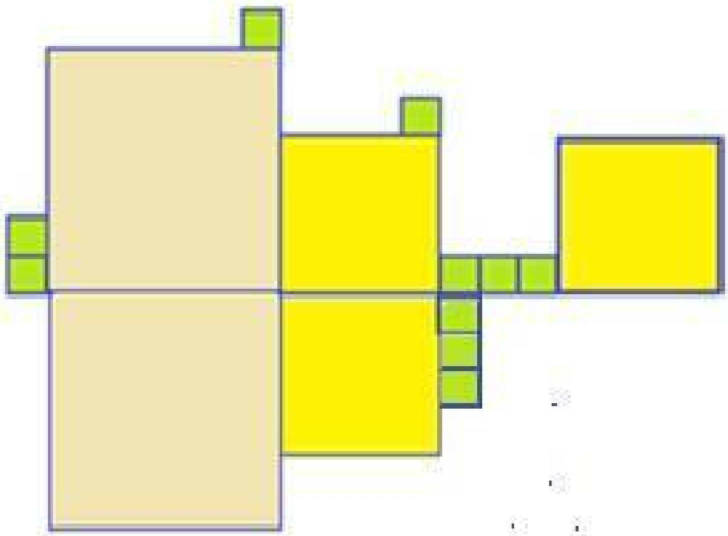


Рис.17

3.19. Имеется три сплава: А, В и С. Процентное содержание меди в каждом сплаве соответственно равно 40%, 60% и 90%. Известно, что вся медь из этих сплавов составляет 4 кг. Установите соответствие сплава и его массы, если масса каждого сплава - целое число килограммов, и заполните таблицу.

МАССЫ СПЛАВОВ

1) 1кг 2) 4 кг 3) 2кг

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А

В

С

3.20. В фермерском хозяйстве № 23 имеется четыре поля: А, Б, В и Г, на которых выращивают зерновые культуры; на каждом поле посеяна пшеница. Процент площади под пшеницей на каждом поле соответственно равен 44 %, 22 %, 66 % и 90 %. В сентябре был собран весь урожай пшеницы на этих полях, и он составил 377,52ц. Укажите площадь второго поля (Б), если известно, что урожайность пшеницы на каждом поле была одинаковой и составляла 33ц/га, а площадь каждого поля равна целому числу гектаров.

1) 1га 2) 11га 3) 2га 3) 4га

Комбинаторика. Перестановки, размещения и сочетания. Задачи для самостоятельного решения.

Перестановки *без повторений n* элементов (объектов) - это способ их последовательного расположения с учётом порядка.

Их количество можно записать P_n и найти по формуле: $P_k = k!$

$k!$ читается как «k под знаком факториала» (заметим, что 0!=1; 1!=1, 2!=1#2 =2, 3! =1#2#3=6, 4!=1#2#3#4=24, 5!=1#2#3#4#5=120, …). Например: *nmk*, *nkm*, *mkn*, *mnk*, *knm*, *kmn*

Пример 1

Сколько четырёхзначных чисел можно составить, если использовать только цифры: 3, 5, 7, 8 и цифры не повторяются?

Составляем четырёхзначные числа, используя только цифры 3, 5, 7, 8, при условии, что цифры не повторяются:

3578, 3587, 3758, 3785, 3875, 3857, 5378, 5387, 5738, 5783, 5873, 5837, 7538, 7583, 7358, 7385, 7835, 7853,8573, 8537, 8753, 8735, 8375, 8357: всего 24 числа.

Или по формуле: $P_k = k!$, $P_4 = 4! = $1#2#3#4=24 (всего 24 числа)

Перестановки

с повторениями

n

элементов (объектов) - это способ их последовательного расположения с учётом порядка. Например:

nnk

,

nkn

,

knn

,

Их количество можно записывать, как и найти по формуле:

=

Пример 2

Сколько четырёхзначных чисел можно составить, если использовать только четыре карточки с числами: 3; 3; 7;7?

3377, 3737, 3773, 7733, 7373, 7337: всего 6 чисел.

Или по формуле:

=

Размещением

без повторения

из

n

элементов по

k

(

n больше либо равно

k

) называется упорядоченная выборка элементов
k
из данного множества элементов
n
.
Их количество можно записывать, как и найти по формуле:
Пример 3
Сколько двухзначных чисел можно составить, если использовать только цифр 2, 3, 4, 5, 7 при условии, что цифры не повторяются?
Составляем двузначные числа, используя только цифры: 2; 3; 4; 5, 7
(без повторения цифр): 23, 24, 25, 27,32, 34, 35, 37, 42, 43, 45, 47, 52, 53, 54, 57, 72, 73, 74, 75: всего 20 чисел.
Или используем формулу:
(всего 20 чисел).
Или используем *правило произведения*:

Правило произведения. Если объект S можно выбрать из множества объектов *m* способами и после каждого такого выбора объект P можно выбрать *n* способами, то пара объектов (S, P) в указанном порядке может быть выбрана *m# n* способами.
Пусть двузначное число вместо первой буквы можно поставить любую из 5 цифр,
тогда вместо другой из 4 отставших, тогда получим: 5·4=20 (всего 20 чисел).
Размещением
с повторениями
называется упорядоченные выборки
k
элементов с повторениями, которые составлены из основного множества
n
элементов (из
n
элементов по
k
элементов)
Их количество
можно записывать, как
и найти по формуле:
Пример 4
Сколько трёхзначных чисел можно составить, если использовать только две цифры: 5, 7 .
Составляем трёхзначные числа используя только цифры 5 и 7:
557, 575, 555, 577, 755, 757, 777, 775: всего 8 чисел.
Или используем формулу:
(всего 8 чисел).
Или используем *правило произведения*:
Пусть трёхзначное число вместо каждой буквы можно поставить только 2 цифры,
(5 или 8), тогда получим: 2·2·2=8 (всего 8 чисел).

Сочетания *без повторения* из *n* объектов по *k* элементов. Эти числа показывают, сколькими способами можно составить комбинацию по *k* элементов из
элементов *n* типов, и которые отличаются хотя бы одним элементом
(элементы в комбинации не повторяются, и порядок их не важен).

Их количество можно записать, как и найти по формуле:

Сочетания имеют определённые свойства:

Пример 5

В коробке 7 стандартных деталей. Сколькими способами можно взять 4 стандартные детали?

Используем формулу:

Пример 6

В коробке 4 красных и 3 синих карандашей. Сколькими способами можно взять 3 красных и 2 синих карандаша?

Три красных из 4 красных можно взять: (способами),

Два синих из 3 синих можно взять: (способами),

5 карандашей, из которых 2 синих можно взять:(способами).

Сочетания с повторениями из *n* объектов по k элементов. Эти числа показывают, сколькими способами можно составить комбинацию по k элементов из элементов *n* типов (элементы в комбинации могут *повторяться*, но при этом *порядок их не играет роли*).

Их количество можно записать, как и найти по формуле:

Пример 7

В кондитерской №1 продают пирожки трёх видов с курагой, яблочным джемом и мясом. Сколькими способами можно купить 5 пирожков в кондитерской №1?

Количество способов, находим по формуле:

Или просто перебираем варианты: {к; к; к; к; к},{к; к; к; к; я},{к; к; к; я; я} {к; к; я; я; я}, {к; я; я; я; я},{я; м; м; м; м},{я; я; м; м; м},{я; я; я; м; м},{я; я; я; я; м}, {я; я; я; я; я}, {м; м; м; м; м},{м; м; м; м; к},{м; м; м; к; к},{м; м; к; к; к},{м; к; к; к; к},{м; к; к; к; я}, {к; м; м; м; я}, {к; я; я; я м},{я; я; к; м; м}, {к; к; я; я; м} {к; к; м; м; я},

заметим, что *порядок здесь не играет роли*, и всего получили 21 способ.

Задачи для самостоятельного решения.

4.1. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, которые имеют хотя бы одну чётную цифру?

4.2. Сколько существует пятизначных натуральных чисел, которые имеют хотя бы одну чётную цифру?

4.3. Сколько существует шестизначных натуральных чисел, которые имеют хотя бы одну нечётную цифру?

4.4. Петя записал все натуральные числа от 1 до 1000, в записи которых нет ни одной цифры 3 ни одной цифры 5 ни одной цифры 7. Сколько чисел записал Петя?

4.5. Егор записал все натуральные числа от 1 до 1000, в записи которых нет ни одной цифры 3 ни одной цифры 5 ни одной цифры 7, ни одной цифры 9. Сколько чисел записал Егор?

4.6. На рисунке 18 показан один из маршрутов из пункта А в пункт В. Сколько маршрутов ведут из пункта А в пункт В? Покажите все маршруты из пункта А в пункт В, если маршрут можно прокладывать только по линиям клеток.

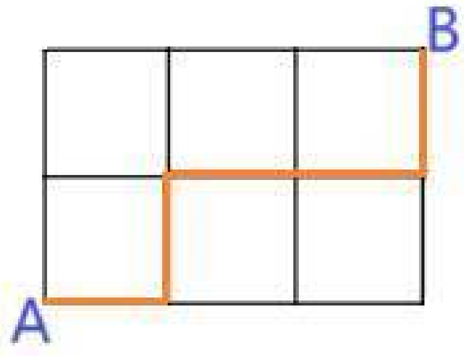
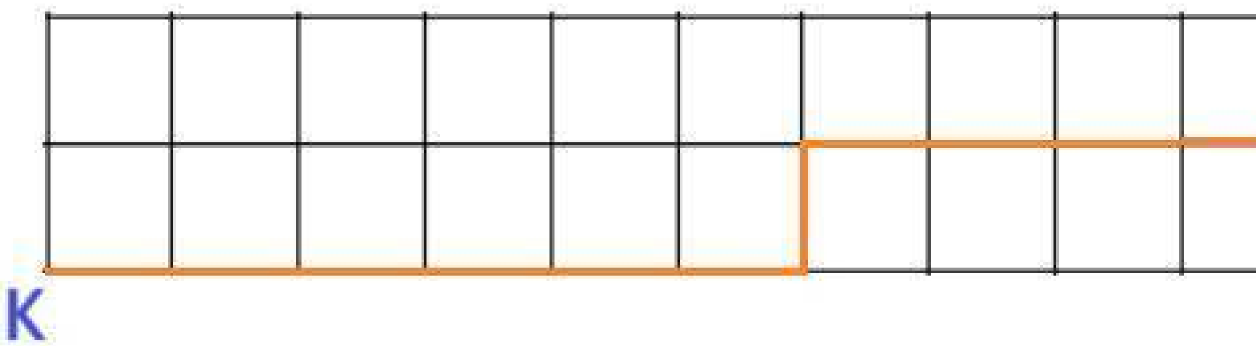


Рис.18.

4.7. На рисунке19 показан один из маршрутов из пункта К в пункт М. Сколько маршрутов ведут из пункта К в пункт М? Покажите все маршруты из пункта К в пункт М, если маршрут можно прокладывать только по линиям клеток.



4.8. На рисунке 20 на координатной плоскости показан один из маршрутов из точки А в точку В, который проходит через точку К . Сколько всего маршрутов ведут из точки А в точку В, и которые проходят через точку К, если А(1;1), В(7;6) и К(5;2)? (7-8)

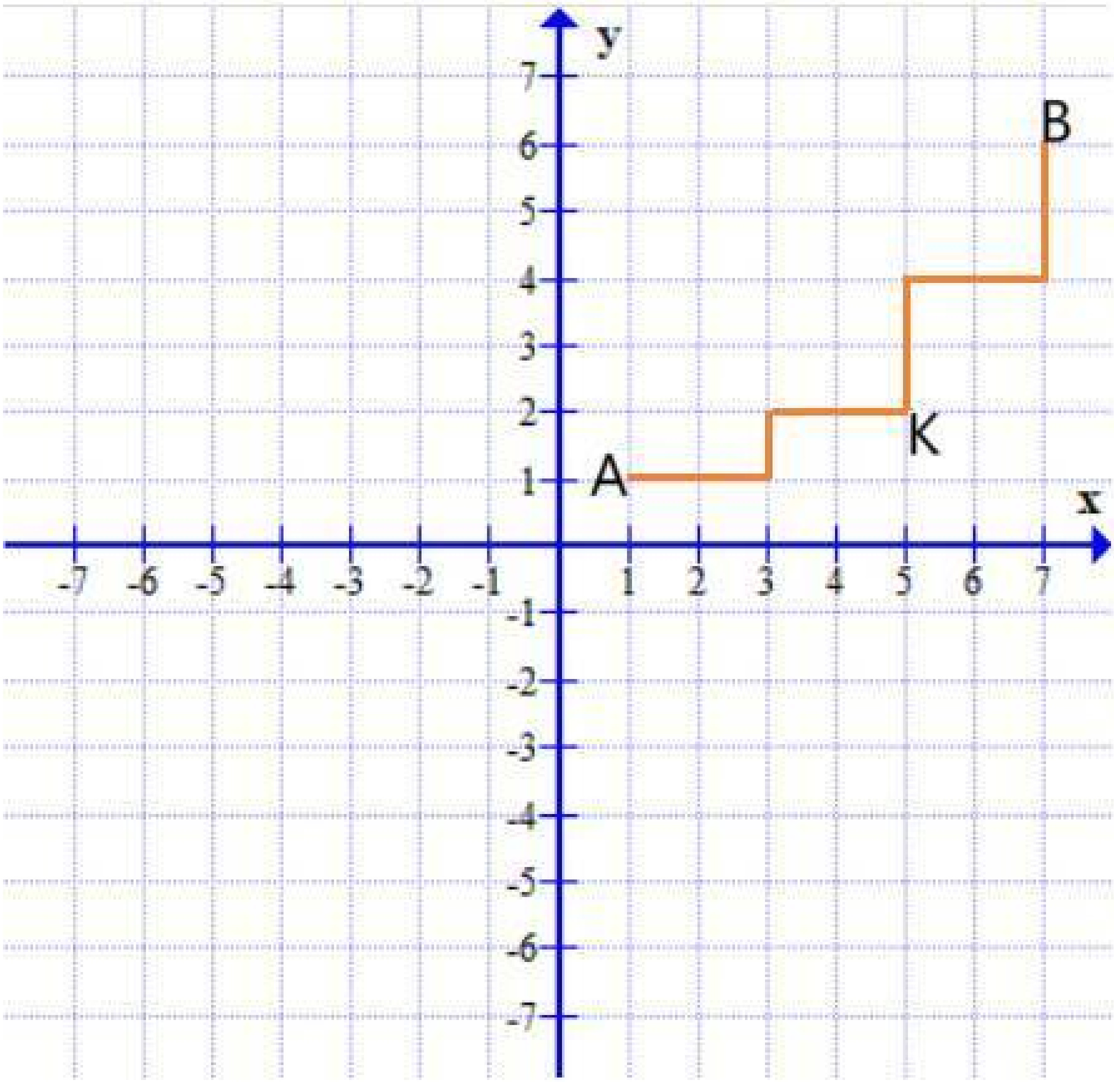


Рис.20.

4.9. На рисунке 21 на координатной плоскости показан один из маршрутов из точки A в точку B, который проходит через точку P . Сколько всего маршрутов ведут из точки A в точку B, и которые проходят через точку P, если A(-5;1), B(5;6) и P(-2;4)?

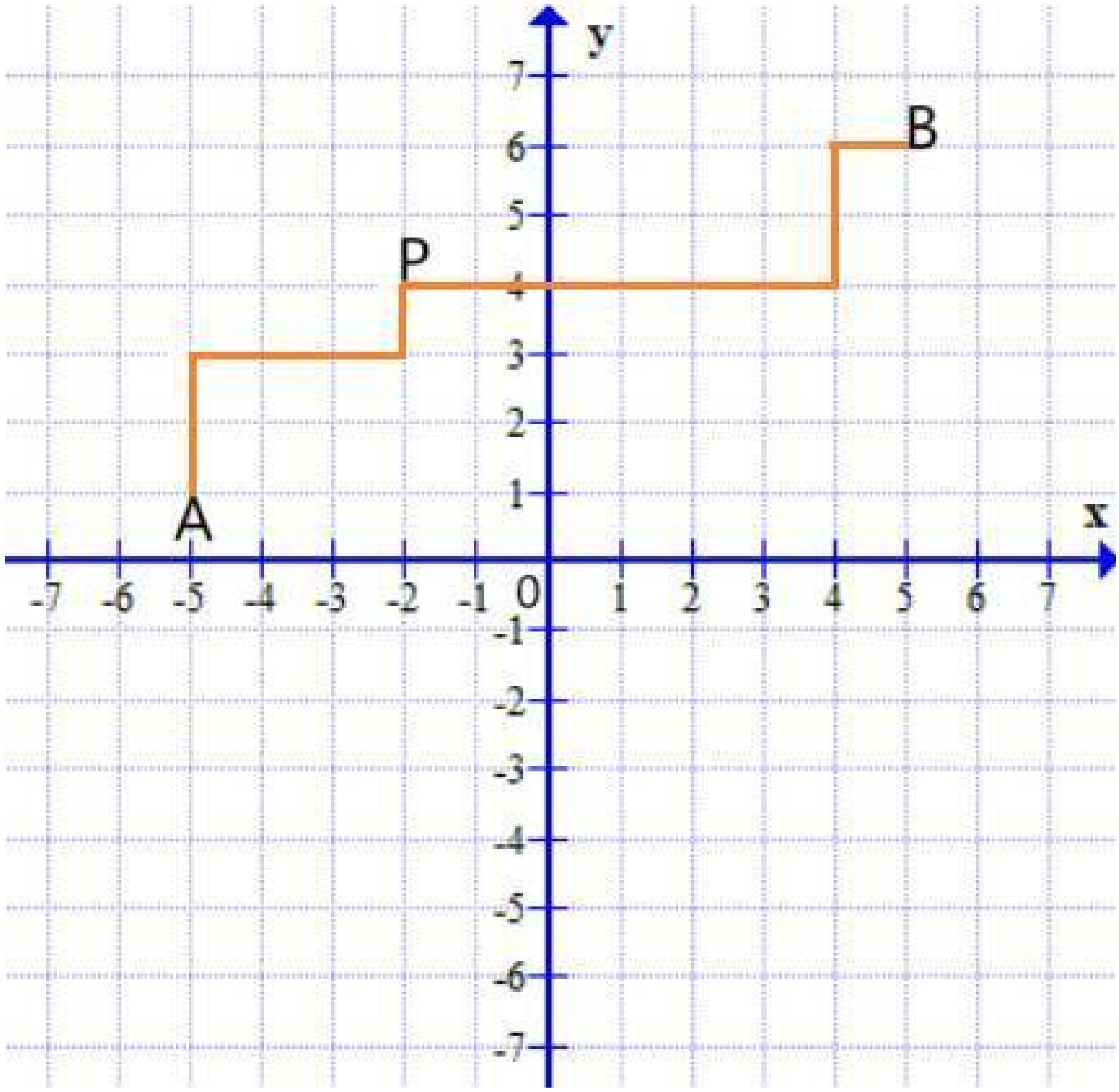


Рис.21.

4.10. Тридцать девять шестиклассников и семиклассников - обменялись рукопожатиями. Известно, что каждый шестиклассник пожал руку 14 семиклассникам, каждый семиклассник пожал руку 12 шестиклассникам. Сколько было шестиклассников и сколько было семиклассников?

4.11. В школе №2999 два спортивных класса «юные хоккеисты» 11 х и «юные футболисты» 11 ф, всего в двух классах 45 учащихся (все юноши). Известно, что на выпускном вечере каждый «юный хоккеист» пожал руку 15 «юным футболистам», а каждый «юный футболист» пожал руку 12 «юным хоккеистам». Сколько было учеников в 11 х, и сколько было учеников 11 ф?

4.12. У Кати есть 12 книг о народах мира, а у Лены - 10 книг. Всего 22 книги о народах мира и все они разные. Сколькими способами они могут обменяться пятью книгами (то есть дать пять книг в обмен на пять книг)?

4.13. У Максима есть 7 книг «о морях и океанах», а у Егора - 8 книг. Всего 15 книг «о морях и океанах», и все они разные. Сколькими способами они могут обменяться двумя книгами (то есть дать две книг в обмен на две книги)?

4.14. Два пятых класса на каникулах ходили в музеи: музей имени Врубеля М. А. и музей «Технического творчества», известно, что из тех, кто ходил в музей имени Врубеля М. А. 20% ходили еще и в музей «Технического творчества», а из тех, кто ходил в музей «Технического творчества», 25% ходили ещё в музей имени Врубеля М. А . Сколько всего учащихся в этих двух пятых классах, если их число больше 39, но меньше 49, и ещё известно, что 7 учащихся из этих пятых классов на каникулах уехали в другой город и музеи не посещали?

4.15. При формировании десятого химико-биологического класса провели опрос, и получили следующую информацию, что из тех кто интересуется химией 25% ещё интересуются биологией, а из тех кто интересуется биологией 20% ещё интересуются химией, а еще двое Кирилл и Николай честно признались, что этими предметами не интересуются, а записались в этот класс, так как в этом классе все их друзья. Сколько всего учащихся записались в десятый химико-биологический класс, если их число больше 31, но меньше 39?

4.16. Учитель математики на координатной плоскости показал три маршрута из точки A в точку B, из точки M в точку N, и из точки H в точку P. Затем, он сказал: «Посмотрите внимательно и сообщите дополнительную информацию об этих маршрутах». Отличник Кирилл предположил, что наибольшее число маршрутов можно построить из точки M в точку N, несмотря на то, что сумма горизонтальных и вертикальных линий (число сторон клеток) на каждом маршруте одинаковая, равна 8. Установите прав ли Кирилл, если A(-5;1), B(-2;6) и M(1;2), N(5;6), H(-7;-3), P(0;-2), и ещё маршруты можно прокладывать только по линиям клеток ? (Рис.22.)

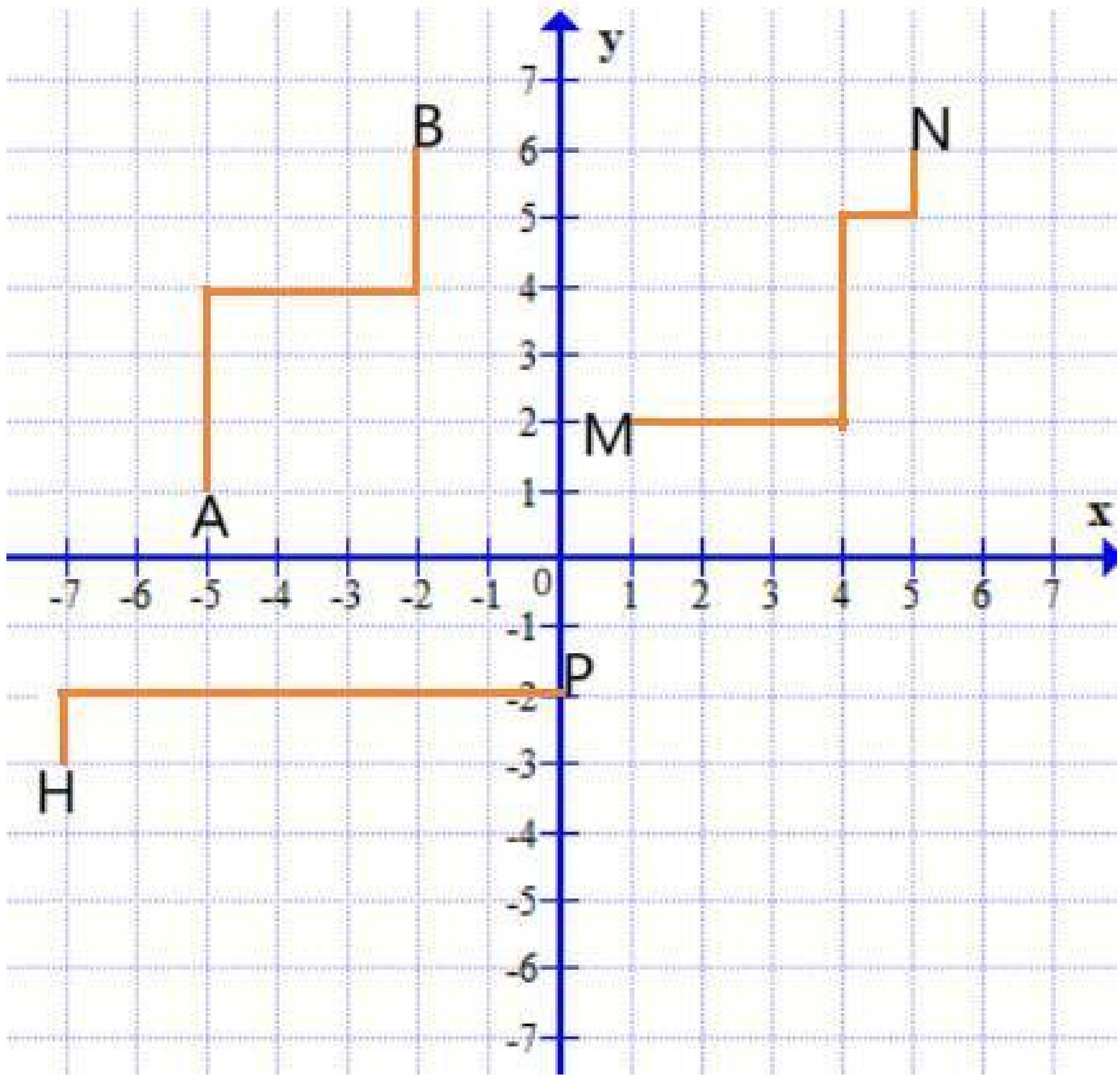


Рис.22.

4.17. Сколько четырёхзначных чисел можно составить, если использовать только цифры: 0, 5, 7, 8 и цифры не повторяются ?

4.18. Сколько двухзначных чисел можно составить, если использовать только цифр 2, 3, 4, 5, 7, 9 при условии, что цифры не повторяются?

4.19. В кондитерской №3 продают булочки четырёх видов с курагой, яблочным джемом, с клубникой, и с вишней. Сколькими способами можно купить 6 булочек в кондитерской №3?

4.20. Искусственному интеллекту был задан вопрос: «Сколько натуральных чисел от 1 до 100000 включительно, в десятичной записи которых нет ни одной цифры 6, ни одной цифры 7, ни одной цифры 8, ни одной цифры 9»?. Искусственный интеллект через 2 минуты выдал ответ 7776. Верно ли искусственный интеллект вычислил?

5.Принцип Дирихле. Принцип крайнего. Задачи для самостоятельного решения.

Принцип Дирихле:

Если $k+2$ элемента разбиты на $k+1$ множеств, то хотя бы одно множество содержит не менее двух элементов.

Пример №1

В коробке лежат 12 красных карандашей, 13 синих, 10 зеленых. Наугад из коробки достают k карандашей. Какое наименьшее число карандашей, необходимо взять из коробки, чтобы среди них было не менее 7 карандашей одного цвета;

Решение:

Так как по условию задачи всего 3 цвета карандашей, то достаточно, взять 19 карандашей, среди которых как минимум 7 карандаша будут одинакового цвета.

Заметим, что $k=19$ наименьшее число, при котором условие выполняется, но если взять по шесть карандашей каждого цвета 6+6+6=18, условие задачи не выполняется, а если взять ещё любой один карандаш из коробки, то какие-то 7 карандашей будут одного цвета.

*Ответ:*19.

Принцип крайнего в олимпиадной математике - это подход, который использует свойства объектов с *экстремальными* (наибольшими или наименьшими) значениями для решения задач.

5.1. В городе К 11 школ, между ними распределяют 56 интерактивных досок. Докажите, что обязательно найдутся две школы, получившие одинаковое количество интерактивных досок.

5.2. В коробке лежат 14 красных карандашей, 11 синих, 12 зеленых. Наугад из коробки достают k карандашей. Какое наименьшее число карандашей необходимо взять из коробки, чтобы среди них было не менее 9 карандашей одного цвета?

5.3. За пропуски занятий 82 студентам предложили сдать дополнительный зачёт по четырём проверяемым темам. За каждую проверяемую тему ставилась одна из оценок: или «2», или «3», или «4». Верно ли, что найдутся 2 студента, получившие одинаковые оценки по 4 проверяемым темам?

5.4. Кирилл хочет написать 609 трёхзначных последовательных натуральных чисел, среди которых имеется 304 пары чисел, сумма каждой из которых делится на 11. Сможет ли он это сделать?

5.5. Можно ли выбрать шесть натуральных чисел n_1, n_2, n_3, n_4, n_5,n_6 и записать их в ряд так, чтобы либо одно из них делилось на 6, либо сумма нескольких рядом стоящих чисел делилась на 6?

5.6. В городе Р 56 детских библиотек, между ними распределяют 1541 новую книгу «Справочник для школьника». Докажите, что обязательно найдутся две библиотеки, получившие одинаковое количество «Справочников для школьника».

5.7. В финальной игре школьного городского турнира по баскетболу выиграла команда «Ураган» гимназии № 2888, набрав в финальной игре 67 очков. В команде «Ураган» 12 юных баскетболистов. Докажите, что как минимум двое юных баскетболистов принесли своей команде в финальной игре одинаковое число очков.

5.8. В коробке-трансфомере лежат 11 разных кусочков большой пиццы. Всегда ли можно разрезать один из них на две части так, чтобы полученные 12 кусочков делились на две порции равной массы по 6 кусочков в каждой?

5.9. Можно ли число 329 записать как сумму семи различных натуральных чисел так, чтобы сумма любых двух слагаемых делилась на 7, и при этом среди семи слагаемых были два таких, что одно больше другого в 9 раз?

5.10. Можно ли на окружности записать семь различных натуральных чисел так, чтобы разность любых соседних чисел делилась на 9, сумма всех чисел была равна 664, и при этом среди этих семи чисел были два таких, что одно больше другого в 19 раз?

5.11. Можно ли в вершинах выпуклого шестиугольника записать различные натуральные числа так, чтобы разность любых соседних чисел делилась на 11, сумма всех чисел была равна 1789, и при этом среди этих шести чисел были два таких, что одно больше другого в 23 раза?

5.12. Можно ли по кругу записать шесть различных натуральных чисел так, чтобы сумма любых двух соседних чисел делилась на 3, сумма всех чисел была равна 69, а среди этих шести чисел нашлись два, одно из которых больше другого в 62 раза?

5.13. В лицее № 2555 28 юных хоккеистов были на тренировочных сборах и пропустили 12 уроков математики. Учитель математики Антон Кириллович предложил им сдать зачёт по трём темам. За каждую тему ставилась одна из оценок: «3», «4» или «5». Верно ли, что найдутся два хоккеиста, получившие одинаковые оценки по всем трём темам?

5.14. Тихон хочет написать 50 натуральных чисел, каждое из которых при делении на 4 даёт остаток 1, так, чтобы сумма всех чисел была равна 5750. Сможет ли он это сделать?

6. Разрезания. Переливание. Логические задачи. Задачи для самостоятельного решения.

6.1. На рисунке 23 на клетчатой бумаге изображён прямоугольник, в котором вырезаны четыре клетки. Разделите этот прямоугольник на две части так, чтобы из них можно было составить квадрат, а линия разреза шла по сторонам клеток.

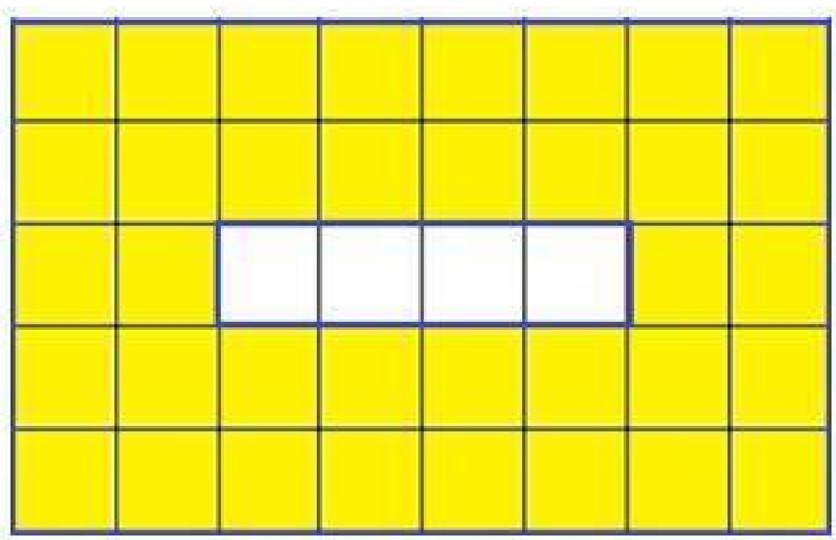


Рис.23.

6.2. На рисунке 24 на клетчатой бумаге изображён прямоугольник, в котором вырезаны одиннадцать клеток. Разделите этот прямоугольник на две части так, чтобы из них можно было составить квадрат, а линия разреза шла по сторонам клеток.

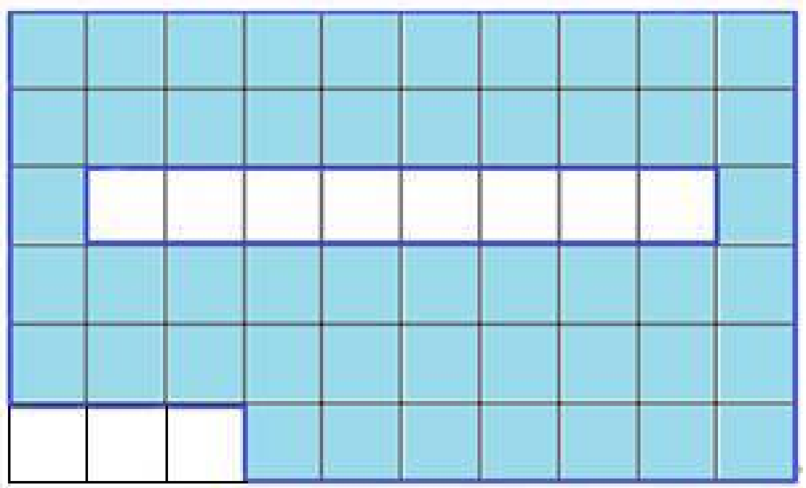


Рис.24.

6.3. На рисунке 25 на клетчатой бумаге изображён прямоугольник, в котором вырезаны 6 клеток. Разделите этот прямоугольник на две части так, чтобы из них можно было составить квадрат, а линия разреза шла по сторонам клеток.

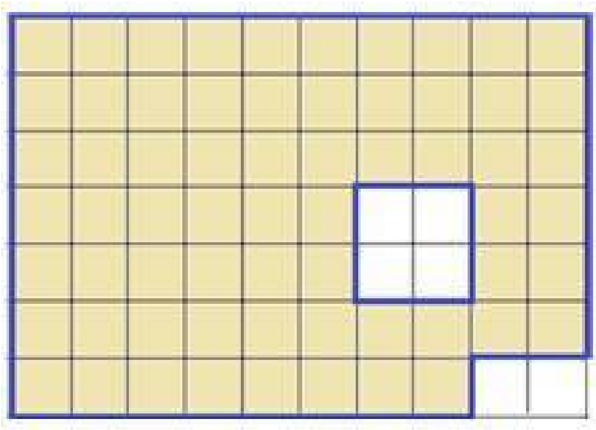


Рис.25.

6.4. На рисунке 26 на клетчатой бумаге изображён прямоугольник, в котором вырезаны 4 клетки. Разделите этот прямоугольник на две части так, чтобы из них можно было составить квадрат, а линия разреза шла по сторонам клеток.

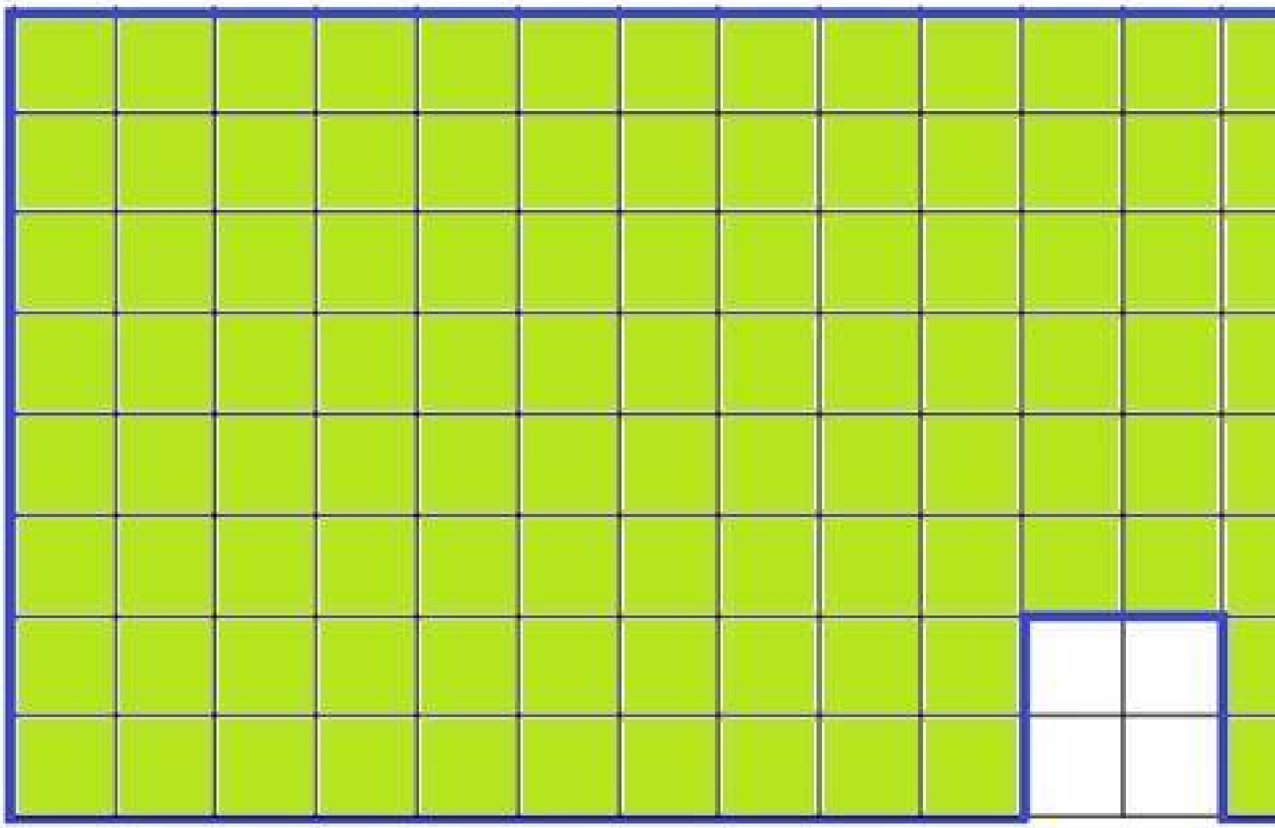


Рис.26.

6.5. На рисунке 27 на клетчатой бумаге изображён прямоугольник, в котором вырезаны 3 клетки. Разделите этот прямоугольник на две части так, чтобы из них можно было составить квадрат, а линия разреза шла по сторонам клеток.

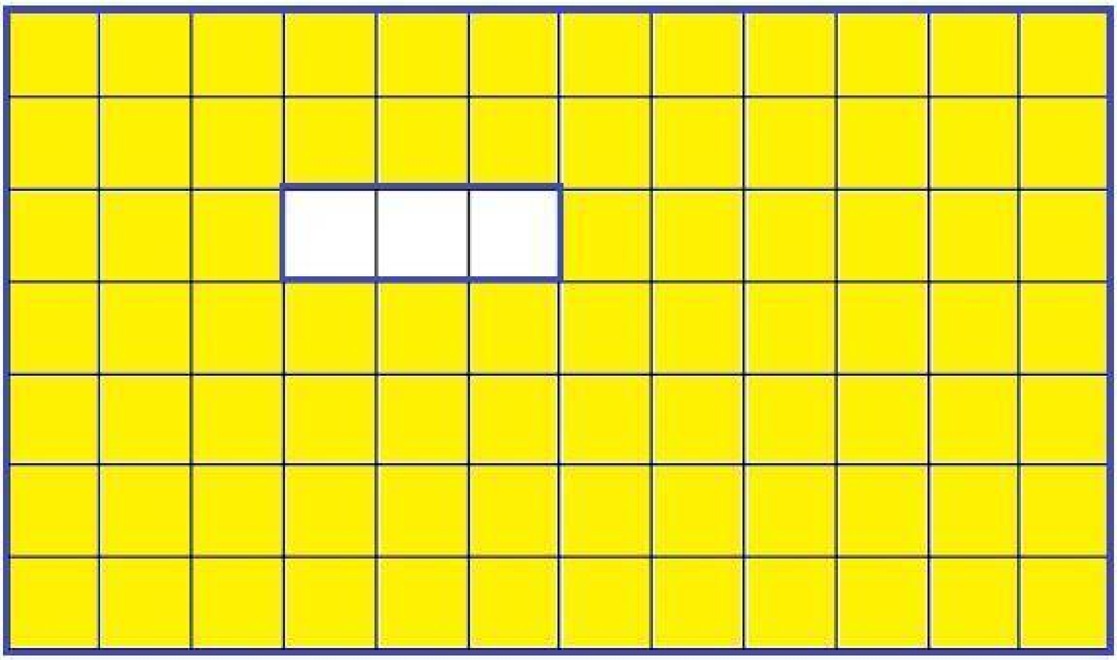


Рис.27.

6.6. На рисунке 28 на клетчатой бумаге изображена фигура, которая состоит из 64 клеток. Замостите эту фигуру фигурками (Рис.29.), каждая из которых состоит из 8 клеток. В каждой клетке записано одно число; на обратной стороне тоже записаны числа, и они совпадают. Найдите сумму чисел по диагонали АВ.

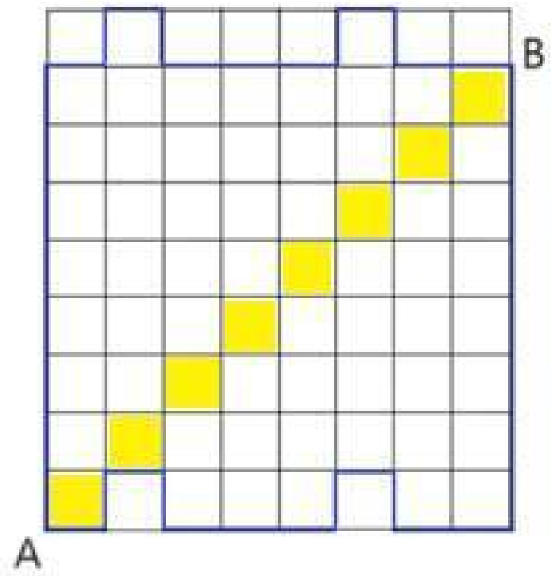


Рис.28.

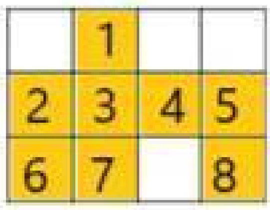
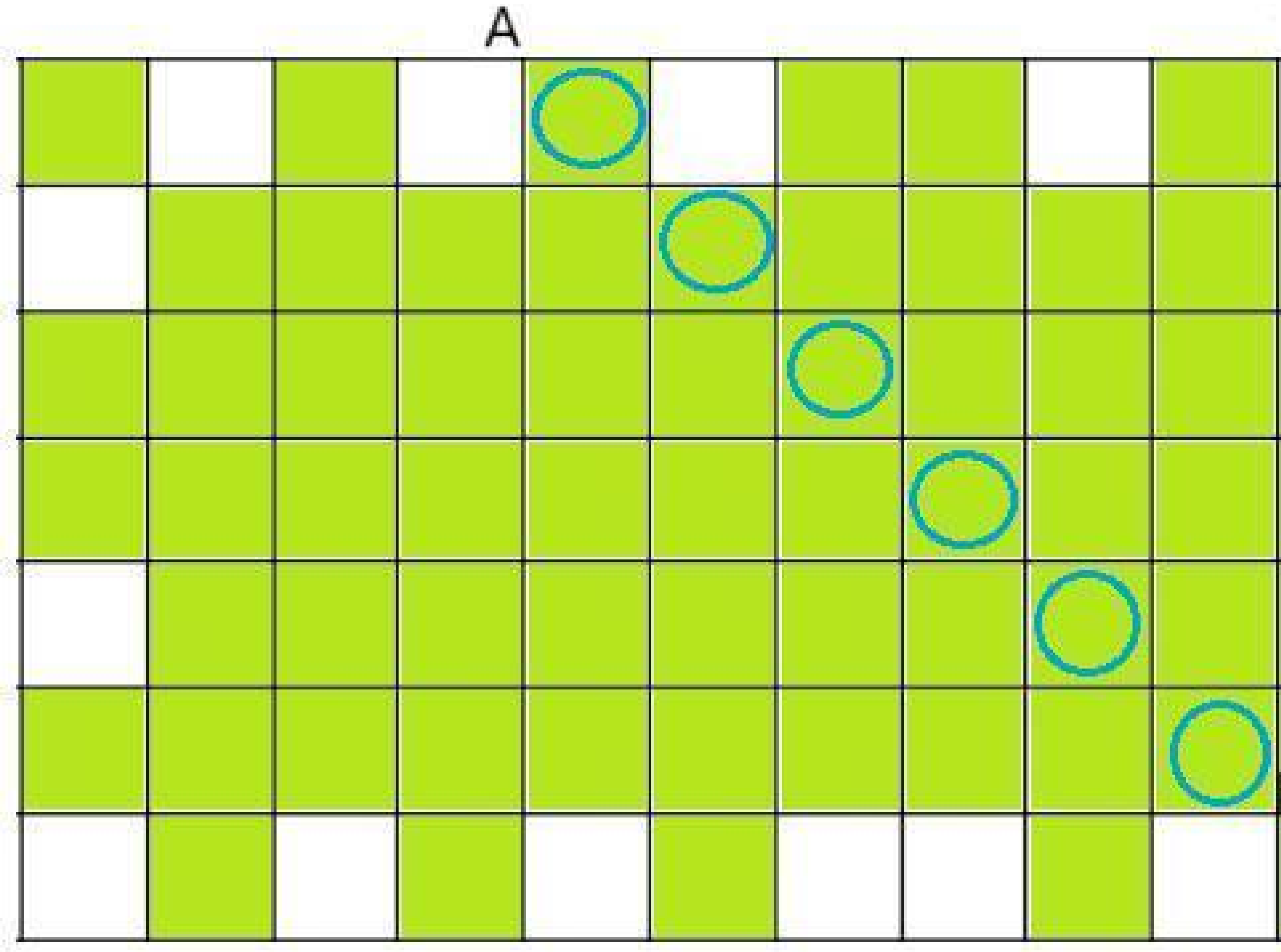


Рис.29.

6.7. На рисунке 30 на клетчатой бумаге изображена фигура, которая состоит из 80 клеток. Замостите эту фигуру фигурками (Рис. 31), каждая из которых состоит из 20 клеток. В каждой клетке записано одно число; на обратной стороне тоже записаны числа, и они совпадают. Найдите сумму чисел по диагонали АВ.



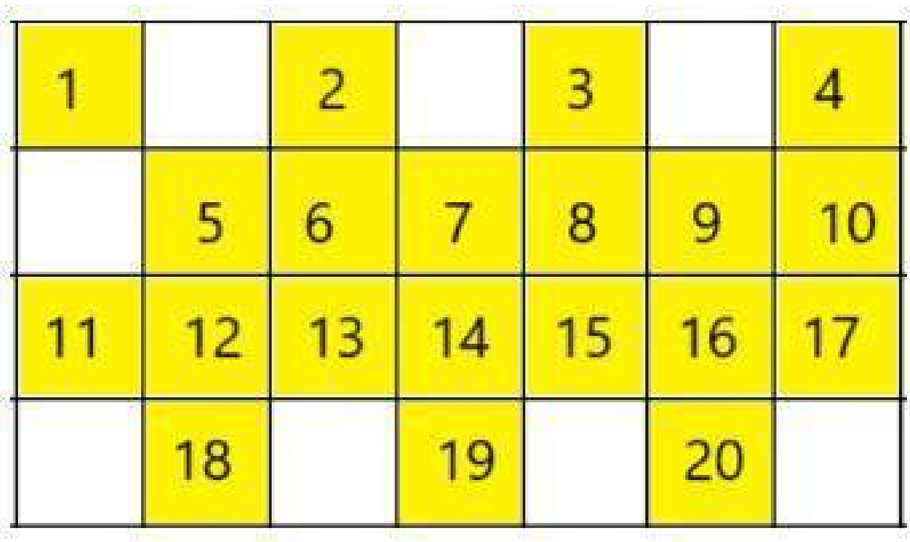


Рис.30. Рис.31.

6.8. Как налить 4 литра воды из озера, если имеется в наличии 7-литровое ведро и 5-литровая банка?

6.9. Как налить 10 литров воды из озера, если имеется в наличии 9-литровое ведро и 2-литровая банка?

6.10. Как налить 71 литр воды в бочку из озера, если имеется в наличии бочка с водой объёмом 100 литров, 7-литровое ведро и 4-литровая банка?

6.11. На концерте молодых исполнителей встретились три однокурсника из одного музыкального училища: пианист Николаев, гитарист Сергеев и виолончелист Александров. Виолончелист сообщил: «Среди нас есть Александр, Николай и Сергей, но ни одно имя не совпадает с его фамилией». «Ты прав», — заметил Николай. Определите, как зовут гитариста?

6.12. На выставке молодых талантов подружились: скульптор из Омска, художник из Казани и мастер-краснодеревщик из Курска. Их имена: Никон, Елистрат и Порфирий. Порфирий сообщил: «Как известно, город Омск славится своими художниками и скульпторами, но на этой выставке из Омска только один Елистрат». «Да ты верно заметил это», — сказал мастер-краснодеревщик. Определите, как зовут художника?

6.13. Конкурс робототехники каждый год проходит в разных городах России. В город Пермь привезли свои изобретения москвич Кирилл, уфимец Семён и новосибирец Николай. Изобретатели подружились.«Вы знаете, друзья, что имена роботов не соответствуют сфере их деятельности; имя робота из Новосибирска не связано с рыбной ловлей, но зато он отлично собирает фрукты, а моего робота — другие умения», — сказал Семён. Определите, как зовут робота, который умеет ловить рыбу и чьих рук это изобретение, если:

робот «А» умеет ловить рыбу на речке с помощью удочки;

робот «Б» умеет собирать съедобные грибы в лесу;

робот «В» умеет собирать фрукты в фруктовом саду, а имена роботов:

«Карасик», «Боровик» и «Персик»?

7. Инварианты. Игры. Турниры. Задачи для самостоятельного решения.

Инварианты - это задачи, в которых необходимо найти инвариант, то есть величину, которая не меняется при выполнении определенных действий.

7.1.В ряд растут 12 грушевых деревьев. Число груш на соседних деревьях отличается на 3.

Может ли на всех 12 грушевых деревьев всего быть 337 груш.

7.2.Ученик Максим разрезал лист бумаги на 5 частей, затем ещё каждый кусок он разрезал либо на 5, либо на 9 частей. Мог ли Максим в конце получить 2027 кусков?

7.3.На доске написаны четыре натуральных числа 5, 6, 10, 20. Кирилл записывает в своей тетради произведение каких-нибудь трёх из этих чисел, а на доске уменьшает четвёртое число на 1. С новыми четырьмя числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и так далее до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Определите, какая сумма всех чисел будет в этот момент записана в тетради у Кирилла.

7.4.На доске написаны пять натуральных чисел 4, 5, 6, 10, 80. Семён записывает в своей тетради произведение каких-нибудь четырёх из этих чисел, а на доске уменьшает пятое число на 1. С новыми пятью числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и так далее до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Определите, какая сумма всех чисел будет в этот момент записана в тетради у Семёна.

7.5. В трёх коробках A, B и C имеются карандаши, а в коробке D нет карандашей, число карандашей в коробках A и B вместе равно $2n$ карандашей, число карандашей в коробках B и C вместе равно $2n+13$ карандашей, а число всех карандашей равно $4n+1$. Из коробки A берут по два карандаша и перекладывают в коробку D. Может ли в какой-то момент в коробке A остаться один карандаш (если $n>10$)?

7.6. В трёх коробках A, B и C имеются карандаши, а в коробке D нет карандашей, число карандашей в коробке A больше, чем в коробке B на $3n$ карандашей. Число карандашей в коробке C, больше, чем в коробке B на $3n$-12 карандашей, а число всех карандашей равно $6n+9$. Из коробки A берут по три карандаша и перекладывают в коробку D. Может ли в какой-то момент в коробке A остаться один карандаш (если $n>10$)?

7.7. Егор и Семён играют в такую игру. Егор задумывает двузначное число и записывает его на доске. Семён записывает такое двузначное число на доске, чтобы сумма двух этих чисел делилась на 10. И так пять раз, числа не должны повторяться, и задумывать число кратное десяти нельзя. Если все пять сумм делятся на 10, выигрывает Семён. Если Семён не может подобрать такое число, чтобы сумма делилась на 10, выигрывает Егор. Кто гарантированно выиграет в этой игре при правильной игре?

Конец ознакомительного фрагмента.