



А.И. Митькин

П.

В. Косарчук

Основная теорема алгебры. Доказательство для школьников

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МАНДАРИН»

Адрес: 125008, М.
Благодарим

А.И. Митькин

**Основная теорема алгебры.
Доказательство для школьников**

«Автор»

2026

Митькин А.

Основная теорема алгебры. Доказательство для школьников /
А. Митькин — «Автор», 2026

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ алгебры на базе 1-ого курса
ВУЗа. Знаний старшеклассников школы должно вполне хватить чтобы
разобраться в доказательстве. Так что, я думаю, сегодня каждый может
придумать своё доказательство этой теоремы.

© Митькин А., 2026

© Автор, 2026

Содержание

Введение	5
Основная теорема алгебры	6
Теорема (ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ)	7
Конец ознакомительного фрагмента.	11

П. В. Косарчук, А.И. Митькин

Основная теорема алгебры.

Доказательство для школьников

Введение

Правильное изложение материала – это когда последовательно излагают теорию, начиная с азов и затем, опираясь на эту теорию доказывают теорему. Только в этом случае обычный читатель может разобраться что откуда получается.

Так поступают авторы хороших учебников. Однако я отойду в этот раз от этой традиции. Мне хочется показать простоту доказательства, с одной стороны. С другой стороны, изложение базовой теории было бы слишком долгим. Поэтому я буду вести повествование в прямо противоположном направлении. Сначала я докажу **основную теорему алгебры**, потом докажу теоремы, на которые опирается это доказательство, потом доказательство тех теорем, которые мне требовались для доказательства основной теоремы. Ну и т.д., т.е. порядок изложения обратный. Кроме того, обозначения, как правило локальны. Это связано с тем, что индексов довольно много и для упрощения восприятия лучше их локально вводить. Кроме того, тащить их с собой из теоремы в теорему тоже неудобно. Но, вообще-то по правилам, обозначений желательно придерживаться одних.

Те положения, что надо будет доказать в последствии, я выделяю жирным курсивом.

Основная теорема алгебры

Основную теорему алгебры в своё время доказал Гаусс в своей докторской диссертации в 1799 году. Я приведу своё доказательство, оно, я думаю, будет понятно школьникам.

Теорема (ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ)

Всякий многочлен имеет в комплексной области хотя бы один корень.

Доказательство.

Докажем эту теорему для *многочленов с вещественными коэффициентами*.

(верхний индекс будет обозначать степень многочлена)

Доказывать буду по индукции.

Шаг 1. Теорема верна для многочлена первой степени (в дальнейшем будет показано, что надо начинать с 4-ой степени, для всех многочленов ниже 5-ой степени есть явные формулы для нахождения корней).

Многочлен

$$P^1(x) = x - a$$

имеет корень $x=a$.

Шаг 2. Допустим, теорема верна для многочлена степени n ,

$$P^n(x)$$

, и всех многочленов более низких степеней, т.е. многочлен такой степени в комплексной области всегда имеет хотя бы один корень

Шаг 3. Докажем, что теорема верна для многочленов степени $n+1$.

Если $n+1$ число нечётное, то можно взять вещественные значения аргумента. *Нетрудно показать, что знак функции (полинома) при достаточно больших значениях (модуля) аргумента определяется только первым членом полинома*. Также, очевидно, что при положительном значении аргумента знак функции будет одним, а при отрицательном противоположным, т.к.

$$(-x)^{2k+1} = (-x)^{2k} * (-x) = -x^{2k} * x = -(x^{2k+1})$$

Т.е. непрерывная функция в двух точках принимает значения разного знака, значит в промежутке она где-то принимает значение ноль. Иначе говоря, есть какой-то вещественный корень. И вопрос исчерпан.

Таким образом, вопрос о существовании корня остаётся рассмотреть, когда n нечётно, а число $n+1$ тогда будет чётным. $n=2k+1$, где k любое целое число.

Итак, рассматриваем полином

$$P^{n+1}(x) = P^{2k+2}(x)$$

чётной степени. График такой функции, если аргумент вещественный, может не пересекать ось абсцисс. Поэтому, в общем случае, корень надо искать в комплексной области:

$$x = x_1 + x_2 * i$$

У нас аргумент содержит вещественную и мнимую часть, т.е. теперь две неизвестных. *Если мы подставим это комплексное выражение в качестве аргумента в полином, то мы получим полином от двух аргументов и кроме того, он будет содержать вещественную и мнимую части:*

$$P^{n+1}(x) = P^{n+1}(x_1 + x_2 * i) = P_1^{n+1}(x_1, x_2) + P_2^n(x_1, x_2) * x_2 * i$$

Это выражение равно нулю тогда, и только тогда, когда одновременно выполняются два условия:

$$P_1^{n+1}(x_1, x_2) = 0$$

$$P_2^n(x_1, x_2) = 0$$

Иначе говоря, должна существовать точка,

$$(x_{10}, x_{20})$$

, в которой оба этих полинома обращаются в ноль.

Допустим, существует непрерывная кривая, отражающая (с точностью до индекса) зависимость

$$x_1(x_2)$$

, при которой полином

$$P_1^{n+1}(x_1, x_2) = 0$$

. Иначе говоря, на плоскости

$$(x_1, x_2)$$

существует кривая, в каждой точке которой полином обращается в ноль.

Аналогично, верно и для второго полинома. Если эти две кривые пересекаются, то в точке пересечения оба полинома обращаются в ноль. Т.е. нам надо доказать, что эти кривые существуют, и они где-то пересекаются.

Если зафиксировать один из аргументов, например , то останется только один аргумент и полином всегда имеет корень, т.к. $n=2k+1$ нечётное число. Т.е. на плоскости

$$(x_1, x_2)$$

существует кривая, в точках которой полином

$$P_2^n(x_1, x_2)$$

обращается в ноль. **Можно показать, что эта кривая непрерывна.**

В общем случае, таких кривых может быть несколько. Нам же достаточно только одной.

При достаточно больших по модулю значениях, есть решение для, которое асимптотически стремится к некоторой константе. Ниже это демонстрируется:

$$P_2^n(x_1, x_2) = (n + 1) * a_0 * x_1 * x_2^{n-1} + a_1 * x_2^{n-1} + \dots$$

Чтобы понять, что получается выражение такого вида, надо более подробно раскрыть полином

$$P^{n+1}(x) = P^{n+1}(x_1 + x_2 * i)$$

Отсюда получаем

$$(n + 1) * a_0 * x_1 + a_1 = 0$$

. Можно показать, что решение находится где-то недалеко от константы.

Таким образом, внутри некоторого отрезка (отрезок, значений) значения для будут очевидно ограничены, но кривая будет непрерывна. А начиная с некоторого момента значение приближается к некоторой константе и колеблется около него. Т.е. асимптота – это горизонтальная прямая.

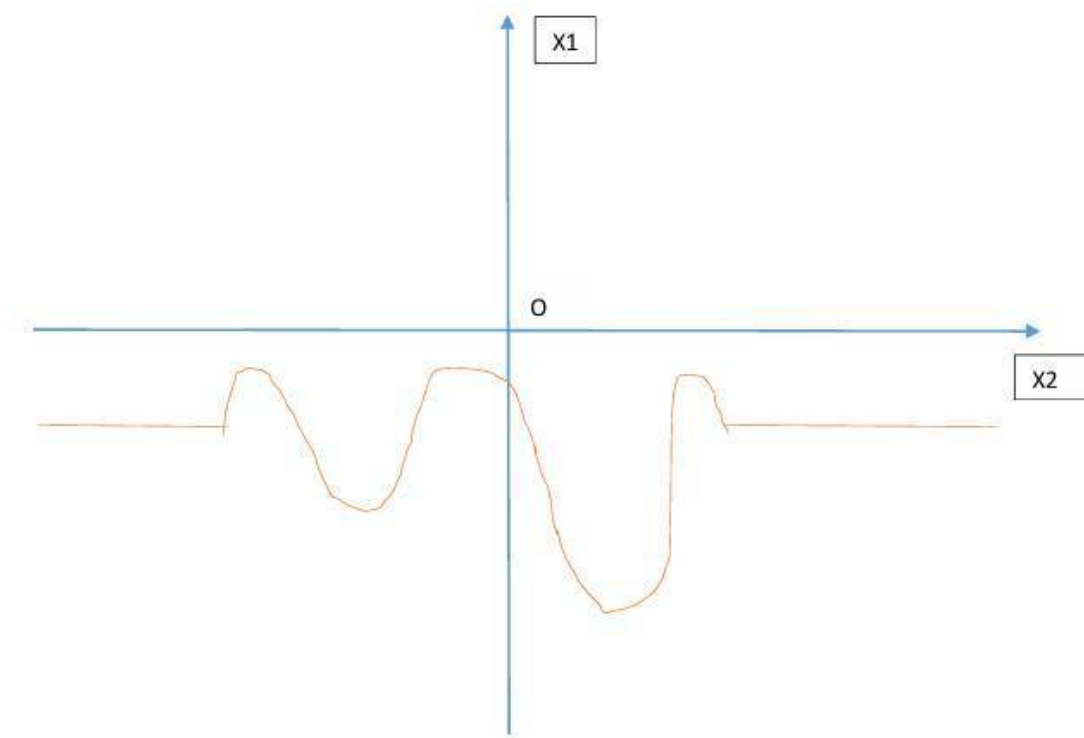


Рис.1

Условно кривая отображена на рисунке 1. Нам неважно, как выглядит кривая, нам важно лишь то, что она ограничена, непрерывна и асимптотически стремится к какому-то значению.

Итак, у нас есть непрерывная кривая для полинома

$$P_2^n(x_1, x_2)$$

, в любой точке которой значение полинома обращается в ноль и нам известно, как примерно выглядит одна из таких кривых. Если мы найдём аналогичную кривую для полинома

$$P_1^{n+1}(x_1, x_2)$$

и докажем, что эти кривые пересекаются, то в точке пересечения оба полинома обращаются в ноль, т.е. эта точка определит корень.

Однако

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «Литрес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на Литрес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.