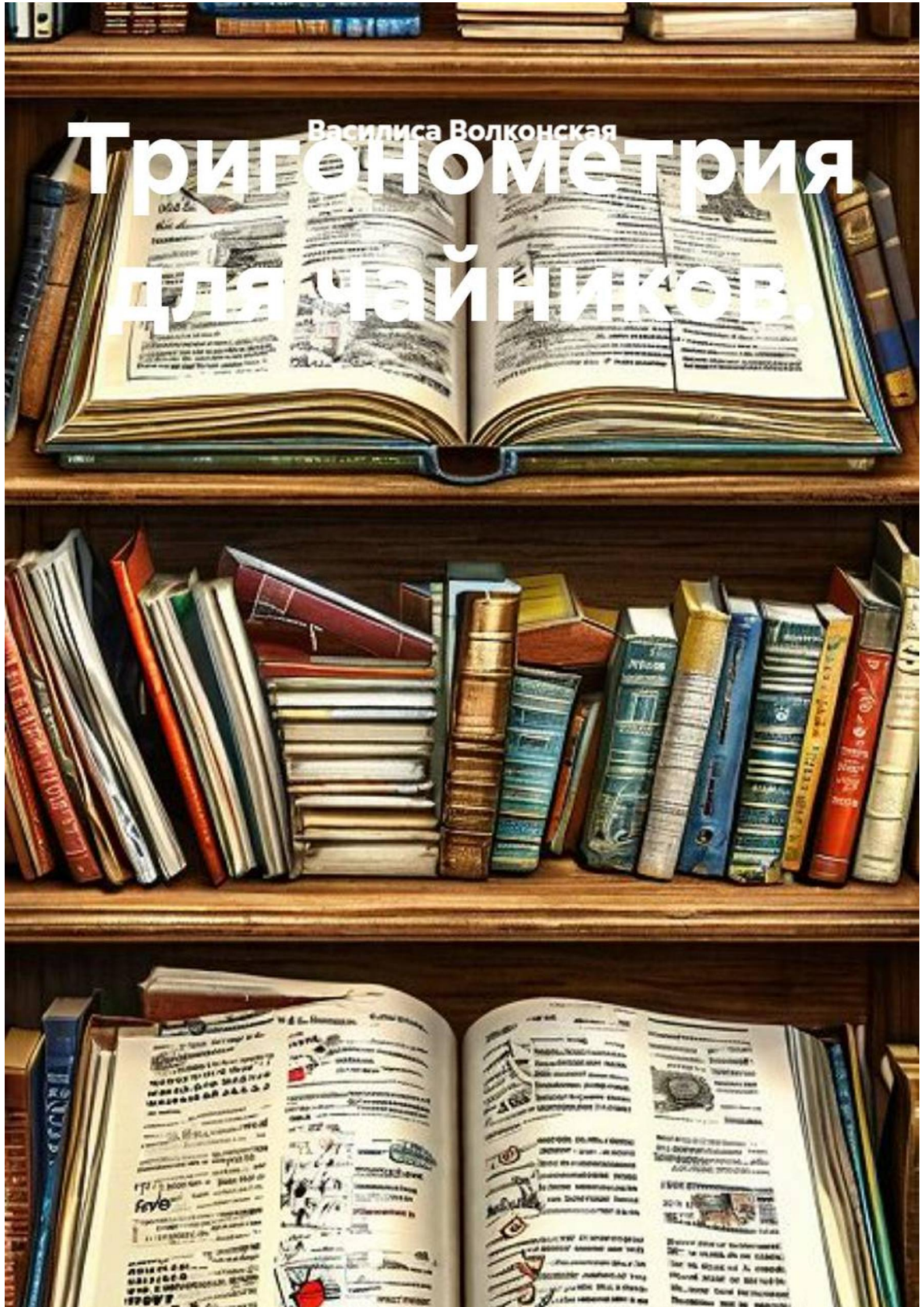


Тригонометрия для чайников.

Василиса Волконская



Василиса Волконская

Тригонометрия для чайников.

«Автор»

2026

Волконская В.

Тригонометрия для чайников. / В. Волконская — «Автор», 2026

В серии этих книг собрано много методик по решению и школьной математики и высшей математики. В книгах подробно разобраны различные примеры, для сдачи экзаменов и в школе и в университете. Собраны многие правила и методики решения задач. Материал написан доступно для любого среднего ученика, который хочет понять математику, а не бездумно ее списать.

© Волконская В., 2026

© Автор, 2026

Василиса Волконская

Тригонометрия для чайников.

Содержание:

1. Числовая окружность.
2. Полярные и декартовы координаты; и связь между ними.
3. Примеры на вычисление по окружности координат точек.
4. Знаки функции в четвертях.
5. Числовые промежутки на окружности.
6. Синус и косинус, тангенс и котангенс, на числовой окружности.
7. Первоначальные тригонометрические формулы.
8. Формулы, полученные из основного тригонометрического тождества.
9. Формулы двойного аргумента.
10. Формулы понижения степени.
11. Формулы суммы и разности углов, с разными аргументами.
12. Формулы суммы и разности функций, с разными аргументами.
13. Формулы произведения функции, с разными аргументами.
14. Тангенс и котангенс, суммы и разности углов, с разными аргументами.
15. Сумма и разность тангенсов и котангенсов с разными аргументами.
16. Произведение тангенсов и котангенсов, с разными аргументами.
17. Формулы половинного аргумента.
17. Формулы перехода к половинному аргументу тангенса.
18. Формулы перехода к половинному аргументу котангенса.
19. Сумма и разность тангенса и котангенса, с одинаковыми аргументами.
20. Формулы кратных углов.
21. Формулы приведения.
22. Обратные тригонометрические функции.
23. Свойства обратных тригонометрических функций.
24. Нахождение значений обратных тригонометрических функций.
25. Чётность и нечётность обратных тригонометрических функций.
26. Область определения и область значения функции.
28. Тригонометрическая окружность для решения простых уравнений.
29. Решение простых тригонометрических уравнений с синусом и с косинусом с табличным значением, алгоритм.
30. Примеры решения простых тригонометрических уравнений.
31. Правила и запоминки для решения простых тригонометрических уравнений.
32. Решение простых тригонометрических неравенств, алгоритм.
33. Примеры простых тригонометрических неравенств на синус и косинус.
34. Алгоритм решения неравенства с не табличными значениями синуса и косинуса.
35. Примеры простых тригонометрических неравенств на синус и косинус с не табличными значениями.
36. Решение неравенств с тангенсом и с котангенсом с табличными значениями, алгоритм.
37. Примеры простых тригонометрических неравенств на тангенс и котангенс с табличными значениями.
38. Решение неравенств с тангенсом и с котангенсом с не табличными значениями, алгоритм.

39. Примеры неравенств с тангенсом и с котангенсом с не табличными значениями.

Тригонометрия для начинающих. Тригонометрия для чайников.

По учебнику Мордковича, десятый класс.

1. Числовая окружность.

В школе тригонометрию начинают изучать с числовой окружности.

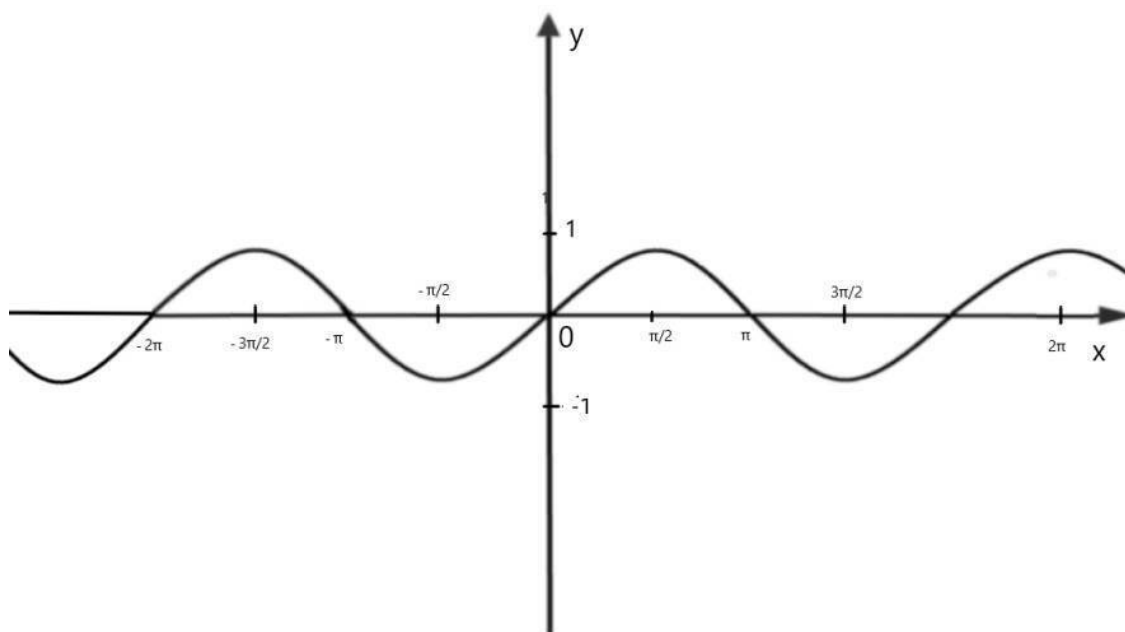
Она даётся просто, как данная. И никто не понимает, зачем она нужна и как она получается.

Для того чтобы понять, для чего нужна числовая окружность и как она получается. Нужно хотя бы схематично изобразить; графики тригонометрических функций, с основными точками пересечения их с осью x ; и максимумами и минимумами функций, если они есть.

У синуса и косинуса они есть, у тангенса и котангенса их нет.

Изобразим схематично графики всех нужных функций. И перечислим некоторые их свойства.

1)) $y = \sin x$



1) Область определения.

$D(f): x \in (-\infty; +\infty)$

2) Область значений.

$E(f): y \in [-1; 1]$

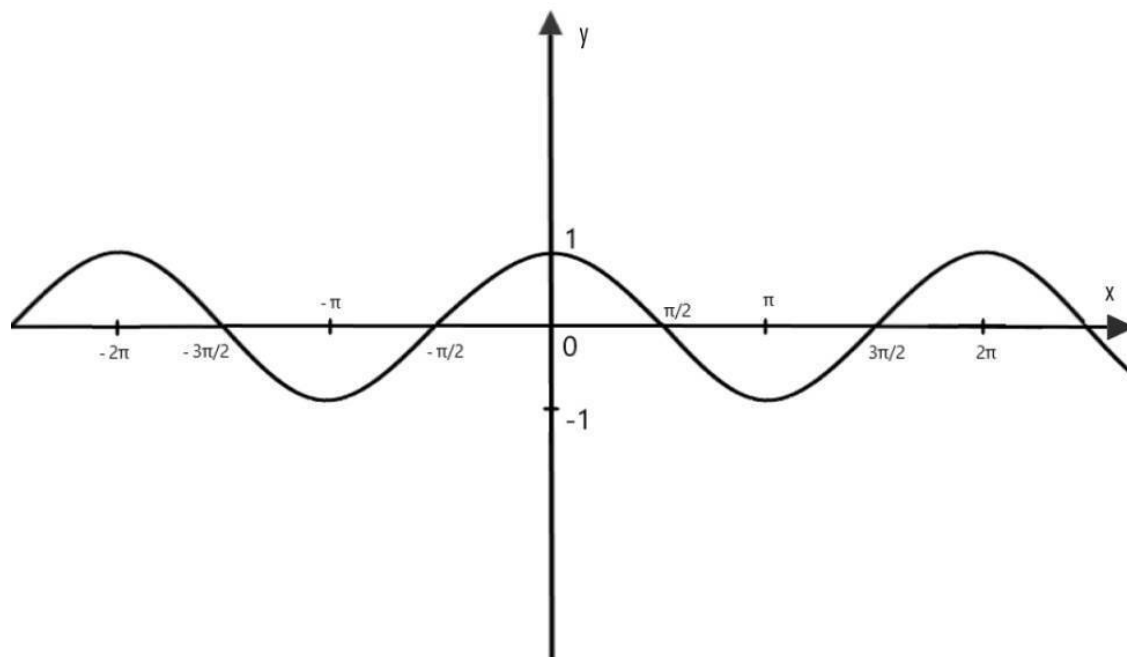
3) функции нечётная.

$f(-x) = -f(x)$

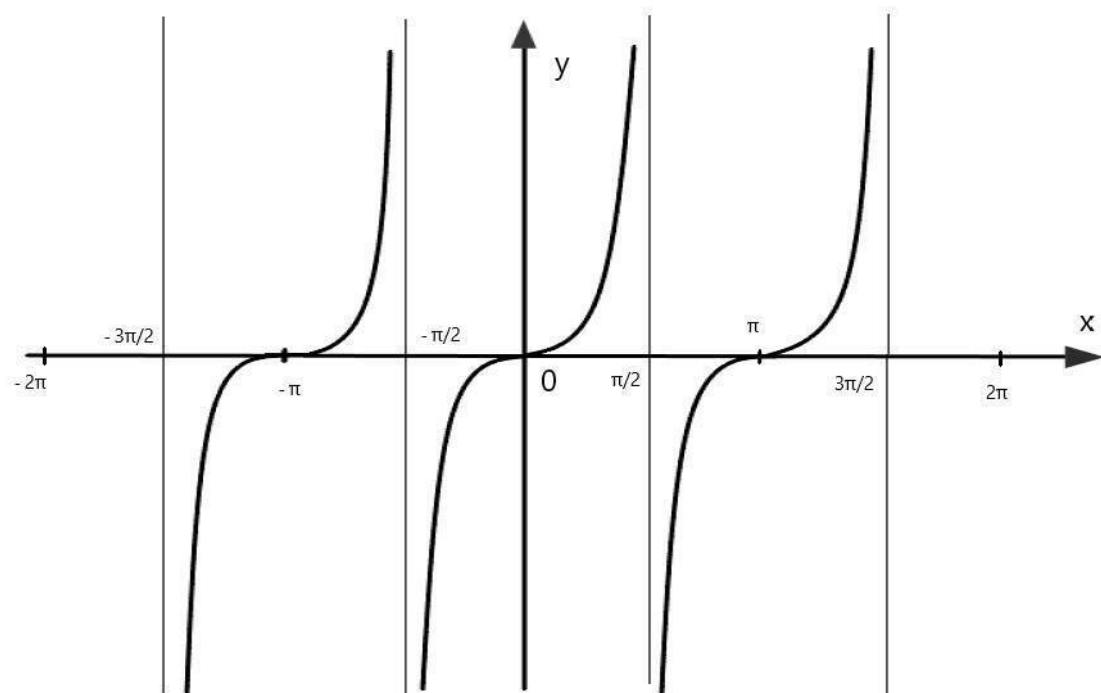
4) Функция периодическая.

С периодом $T = 2\pi$

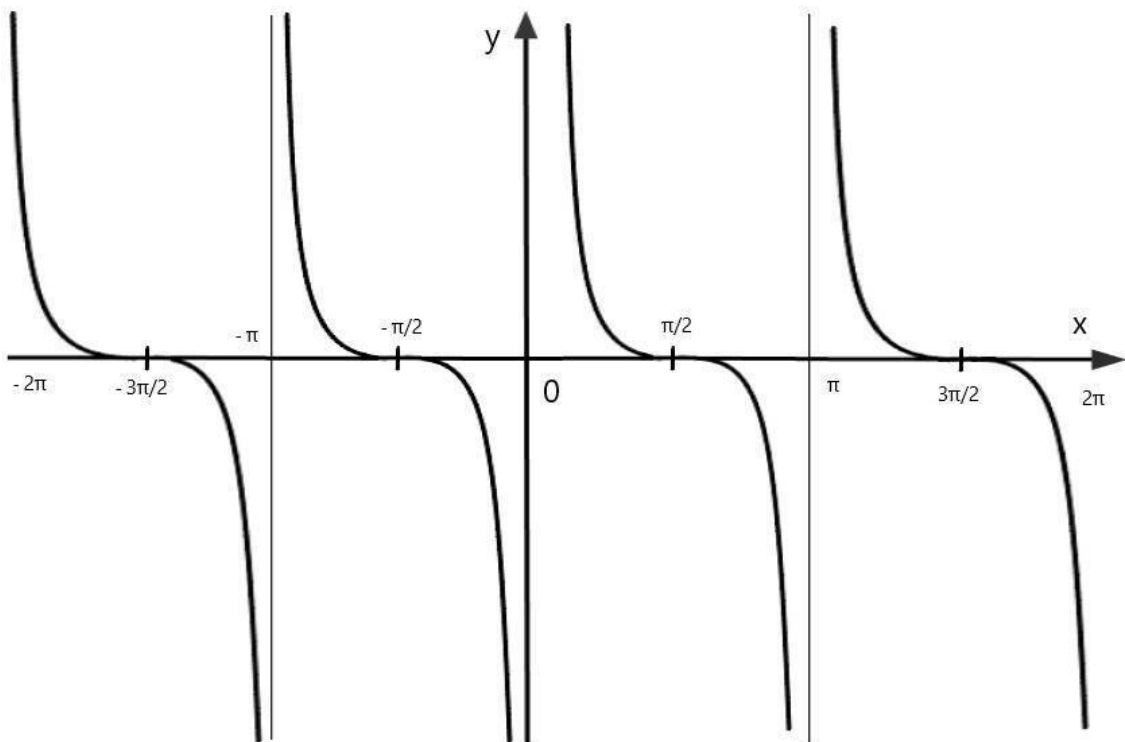
2)) $y = \cos x$



- 1) Область определения.
 $D(f): x \in (-\infty; +\infty)$
- 2) Область значений.
 $E(f): y \in [-1; 1]$
- 3) Функция четная.
 $f(-x) = f(x)$
- 4) Функция периодическая.
С периодом $T = 2\pi$
- 3)) $y = \operatorname{tg} x$



- 1) Область определения.
 $D(f): x \in (-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n); n \in \mathbb{Z}$
- 2) Область значений.
 $E(f): y \in (-\infty; +\infty)$
- 3) Функция нечётная.
 $f(-x) = -f(x)$
- 4) Функция периодическая.
 С периодом $T = \pi$
- 4)) $y = \operatorname{ctg} x$



- 1) Область определения.
 $D(f): x \in (\pi n; \pi + \pi n); n \in \mathbb{Z}$
- 2) Область значений.
 $E(f): y \in (-\infty; +\infty)$
- 3) Функция нечётная.
 $f(-x) = -f(x)$
- 4) Функция периодическая.
 С периодом $T = \pi$

Посмотрев на графики функций: $y = \sin x$ и $y = \cos x$ мы видим, что область значений этих функций $[-1; 1]$.

Следовательно, координаты u , могут быть только в этом отрезке. За ним их нет. Поэтому берётся единичная окружность.

Берутся две взаимно перпендикулярные оси, которым ставятся в соответствие тригонометрические функции.

Горизонтальной оси, которая обычно бывает осью x , ставится в соответствие косинус.

Вертикальной оси, которая обычно бывает осью y , ставится в соответствии синус.

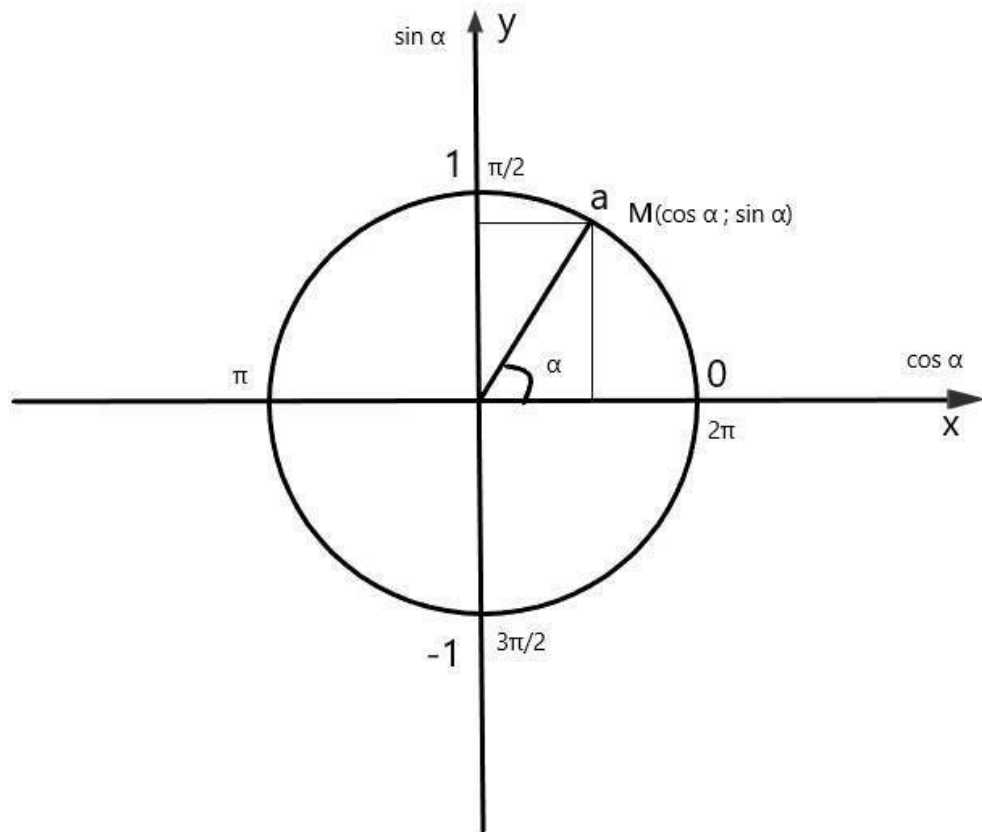
На эти оси накладывается единичная окружность, с центром в начале координат.

Ось x - это значения косинуса, ось y - это значения синуса.

Сама окружность - это координаты x , для синуса и косинуса. То есть ось x , для функций $y = \cos x$ и $y = \sin x$.

А взаимно перпендикулярные оси $\cos x$ и $\sin x$ - это значения y , для функций.

2. Полярные и декартовы координаты; и связь между ними.



На числовой окружности отмечается точка M , которая имеет три координаты.

На самой окружности она имеет координату α (или x)

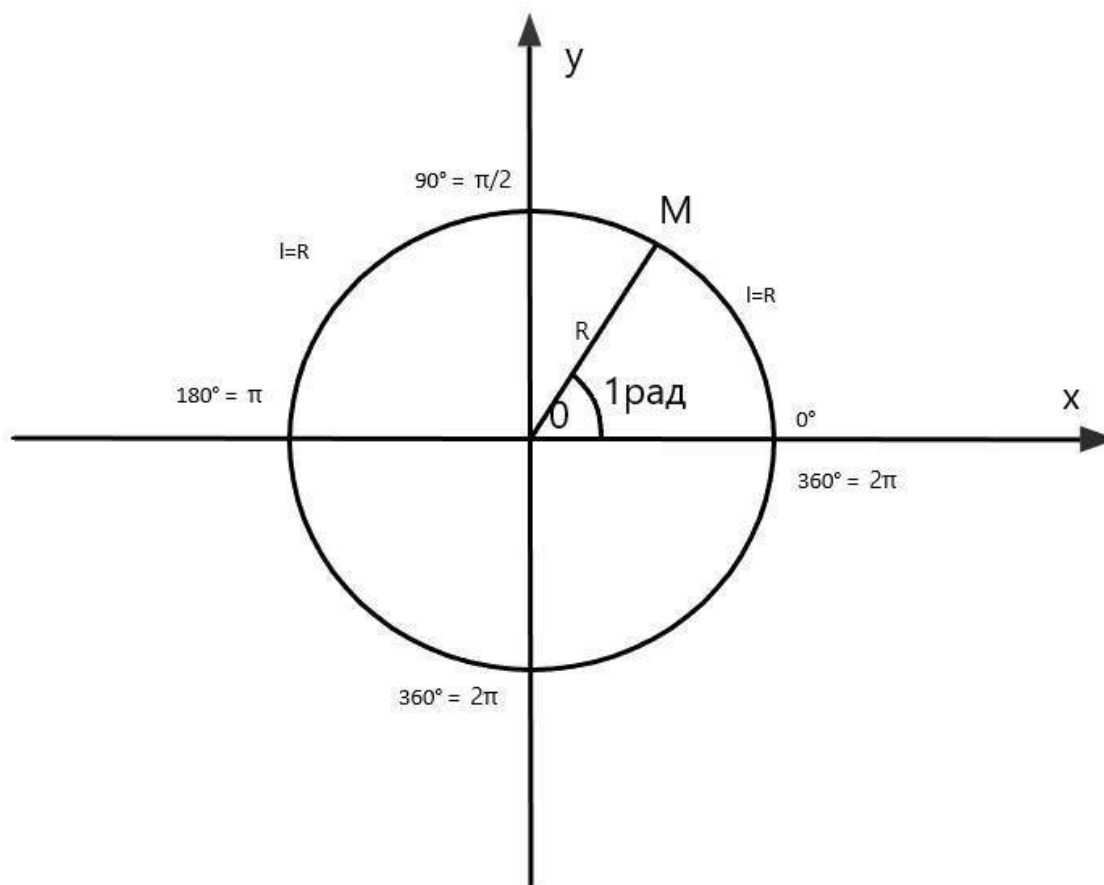
α - это угол между радиус вектором OM и положительным направлением оси x .

Если из точки M опустить перпендикуляры на оси x ($\cos \alpha$) и y ($\sin \alpha$), то это координаты точки M по осям x и y .

Так связаны декартовы координаты точки с полярными координатами (углом поворота α).

Рadiany обозначаются при помощи постоянной величины $\pi \approx 3,14$

Рadian - это центральный угол, соответствующий дуге, длина которой равна радиусу окружности.



$$1 \text{ рад} \approx 57^\circ$$

Развёрнутый угол соответствует π радиан.

Окружность координатными осями, делится на четыре четверти.

Так как оси взаимно перпендикулярны, то каждая четверть окружности, имеет угол или дугу равную 90° .

π радиан соответствует, углу в 180° .

Следовательно, угол в 90° , соответствует $\pi/2$ радиан.

Получим такие соотношения:

$$90^\circ = \pi/2 \text{ радиан.}$$

$$180^\circ = \pi \text{ радиан.}$$

$$270^\circ = 3\pi/2 \text{ радиан.}$$

Окружность можно делить и на более мелкие части, соответствующие распространённым углам, применяемым в задачах в геометрии.

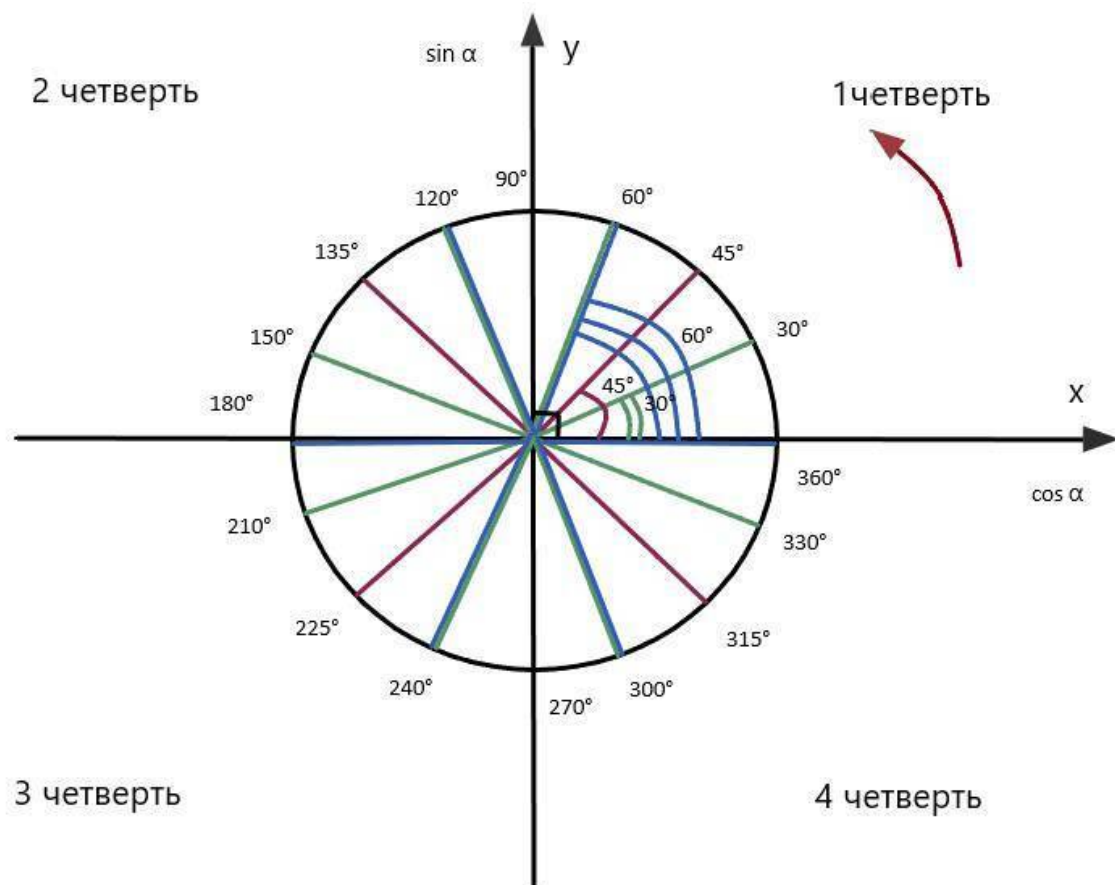
$$30^\circ = \pi/6 \text{ радиан.}$$

$$45^\circ = \pi/4 \text{ радиан.}$$

$$60^\circ = \pi/3 \text{ радиан.}$$

И так далее.

На окружности отмечаются кратные этим углам; углы, в других четвертях.

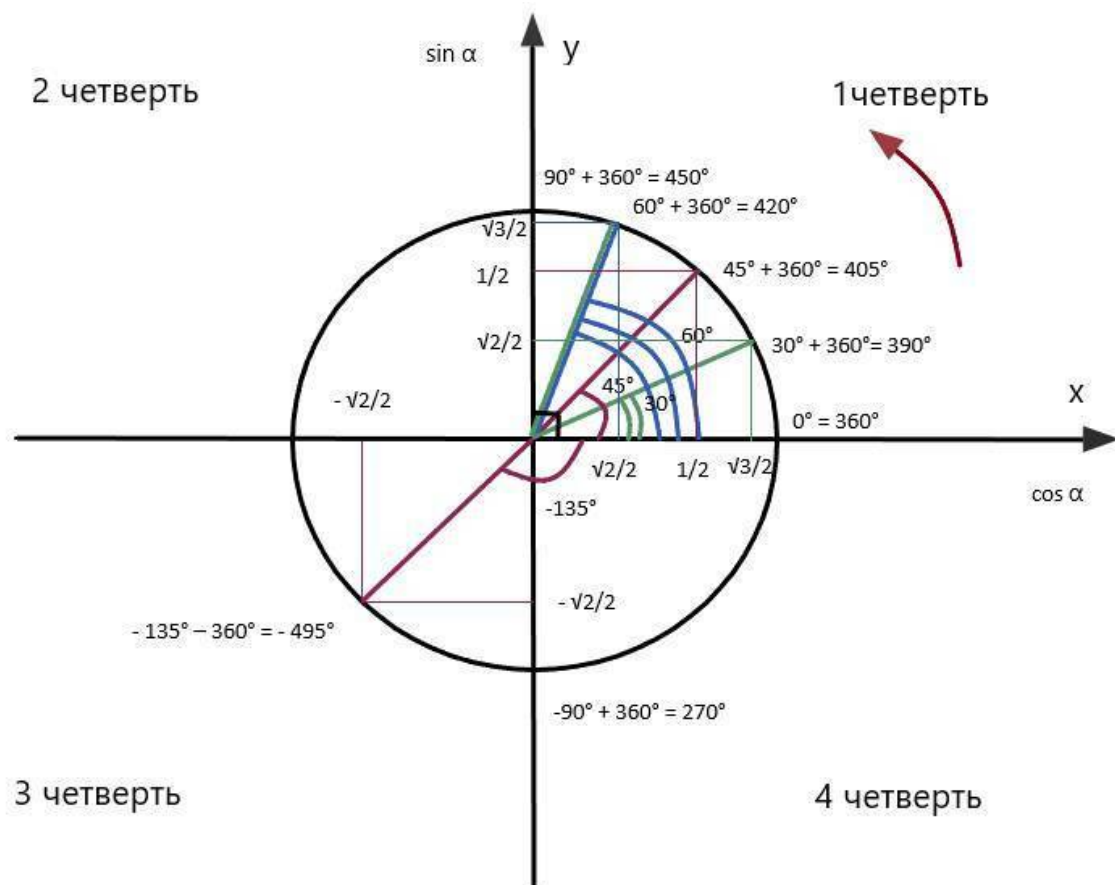


Так как синус и косинус, бесконечные периодические функции; то по окружности можно двигаться бесконечно, в обе стороны.

Движение против часовой стрелки - это положительное направление.

Движение по часовой стрелке - это отрицательное направление.

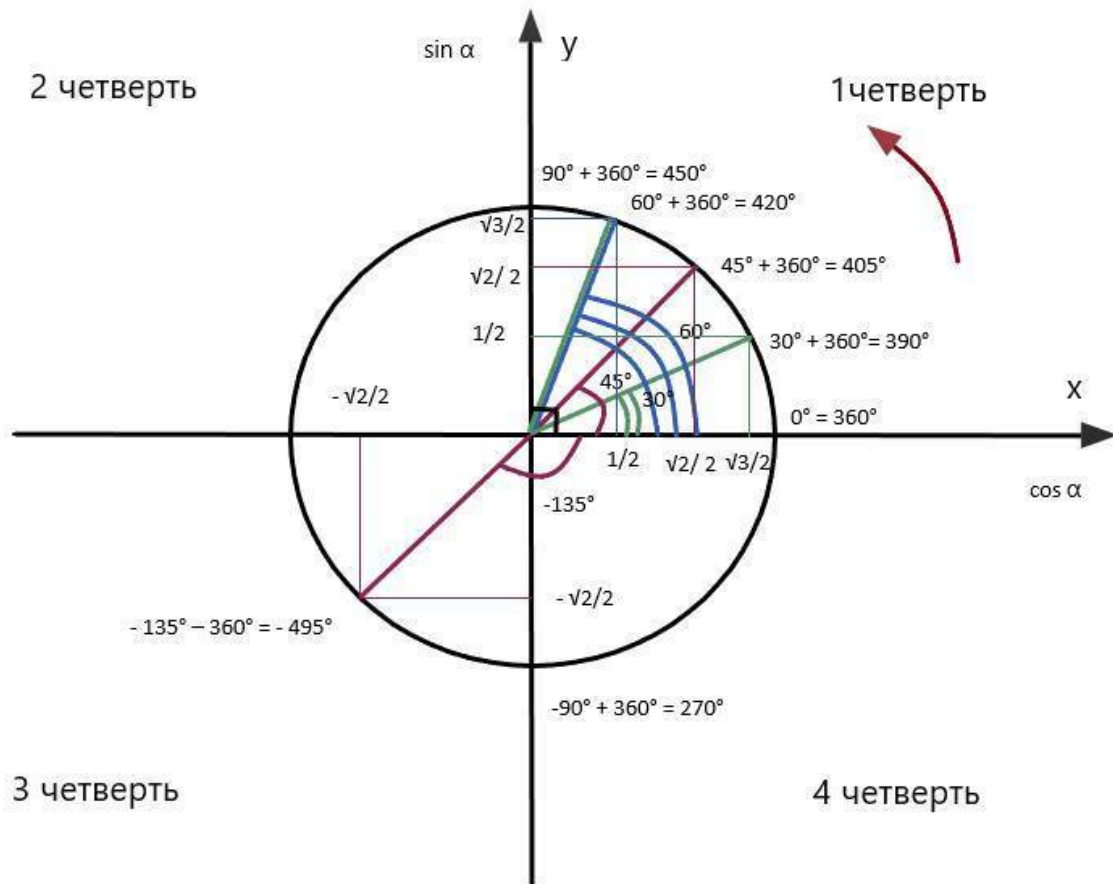
Каждый раз, как мы движемся в различных направлениях, мы попадаем в одни и те же значения на осях x ($\cos \alpha$) и y ($\sin \alpha$); в каких либо углах, повторяющихся через 360° или период 2π .



Поэтому по окружности можно проходить сколько угодно кругов. И через период 360° (2π) попадать в одни и те же значения.

Следовательно, целый круг 360° от угла, можно отбрасывать безнаказанно. Значение будет то же самое.

Если углы даны в радианах, то можно отбрасывать период 2π , от любого угла. И значение будет одно и то же.



Точка на числовой окружности соответствует множеству чисел, которые записываются так:

М соответствует множеству чисел $\pi/6 + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

N соответствуют множеству чисел $\pi/4 + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

P соответствует множеству чисел $\pi/3 + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

A соответствует множеству чисел $-\pi/6 + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

B соответствует множеству чисел $-\pi/4 + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

C соответствует множеству чисел $-\pi/3 + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

$2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$ обозначает, что если вместо n подставлять все целые числа; то получится всё множество чисел, нужное нам.

$\mathbb{Z}$ - это множество целых чисел.

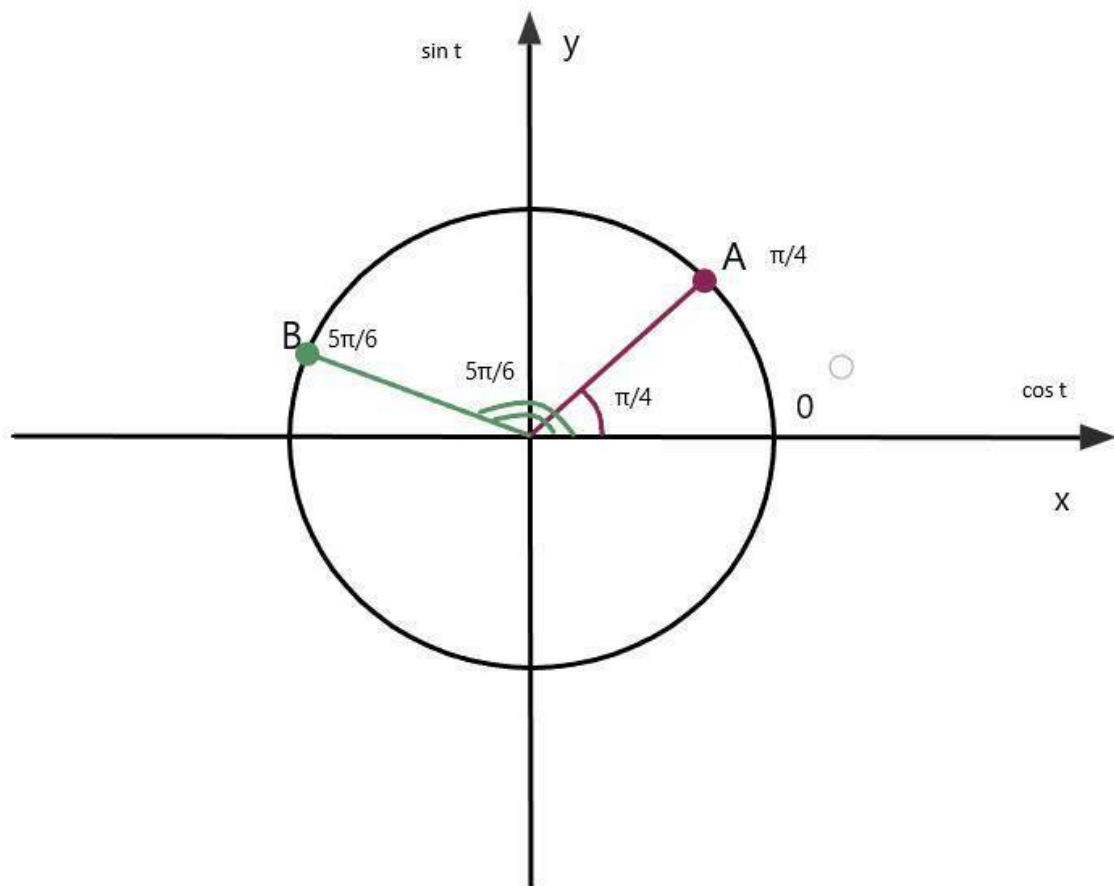
Если нужно найти, например, числовой промежуток, который соответствует дуге; то его можно записать в виде двойного неравенства.

3. Примеры на вычисление по окружности координат точек.

Пример один.

Найти все числа t , которые на числовой окружности соответствуют дуге АВ.

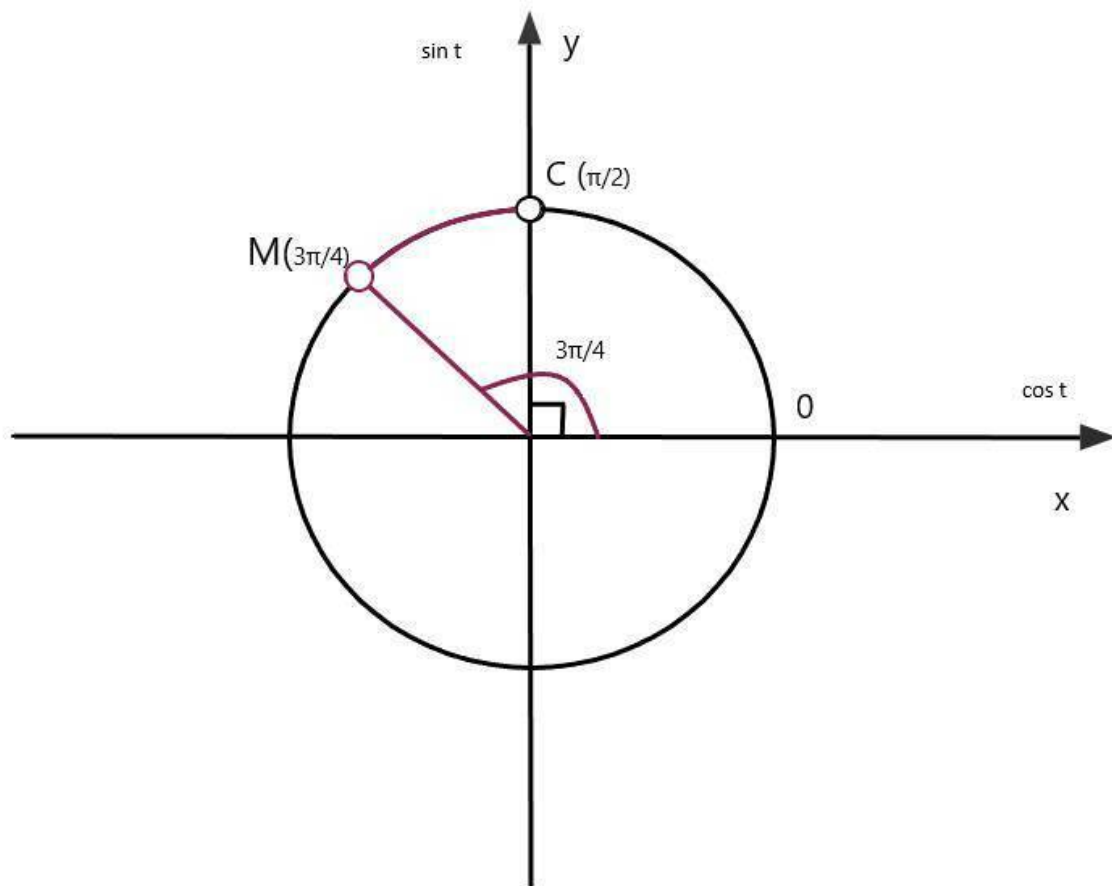
А середина первой четверти.



Ответ: $\pi/4 + 2\pi n \leq t \leq 5\pi/6 + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

Пример два.

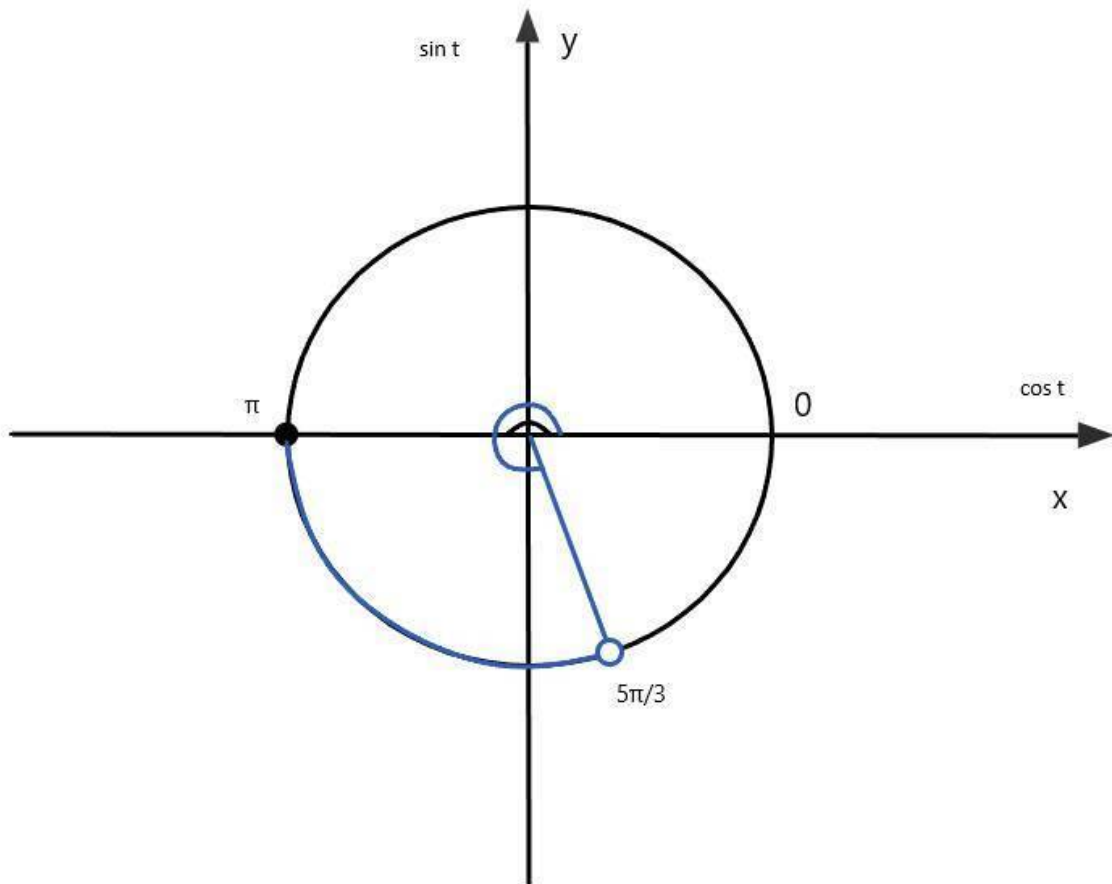
Найти все числа t , которые на числовой окружности соответствуют открытой дуге CM .
 M середина второй четверти.



Ответ: $\pi/2 + 2\pi n < t < 3\pi/4 + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

Пример три.

Найти все числа, t которые соответствуют полуоткрытой дуге AB .



Ответ: $\pi + 2\pi n \leq t < 5\pi/3 + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

Координаты, которые мы сейчас находим, это были полярные координаты. То есть координаты угла поворота радиус вектора.

Единичная окружность наложена на оси координат. Декартову систему координат.

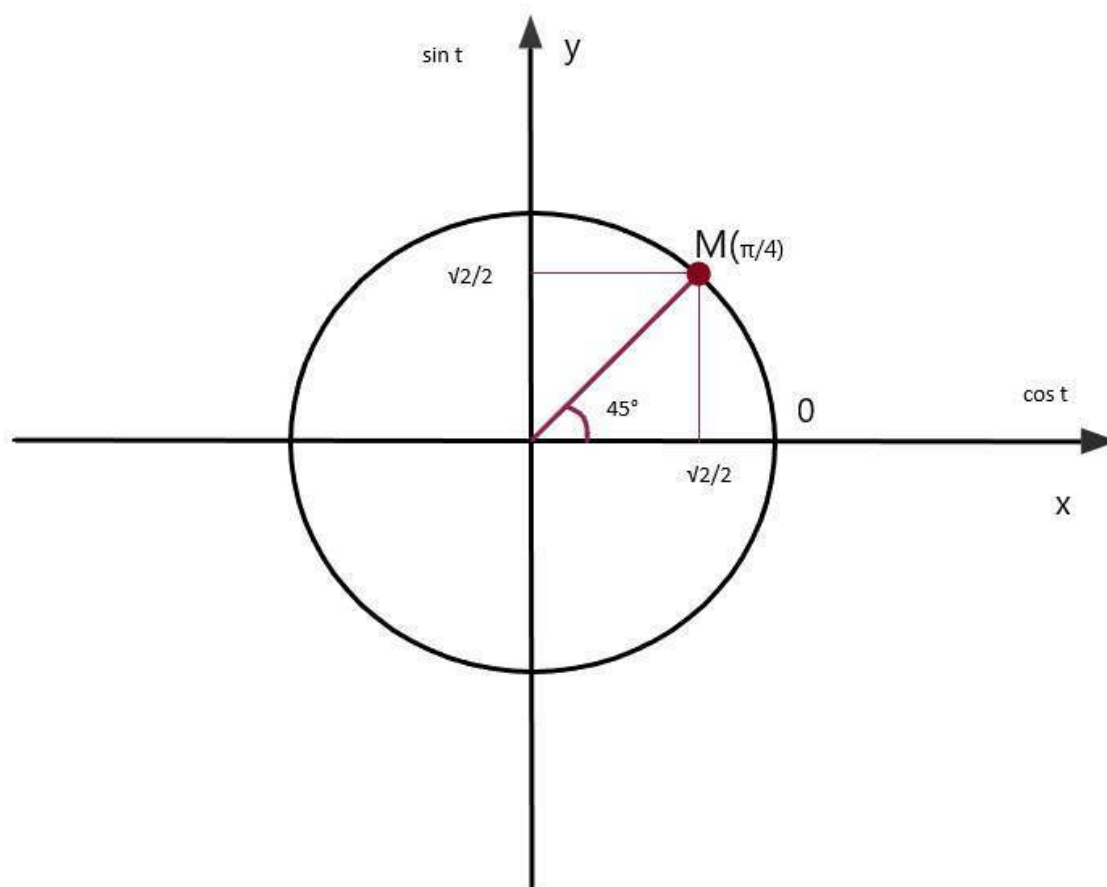
Следовательно, точка на окружности имеет три координаты.

Полярную (угол поворота) и две декартовы по осям x и y .

Соединим декартовы координаты с полярными.

Пример один.

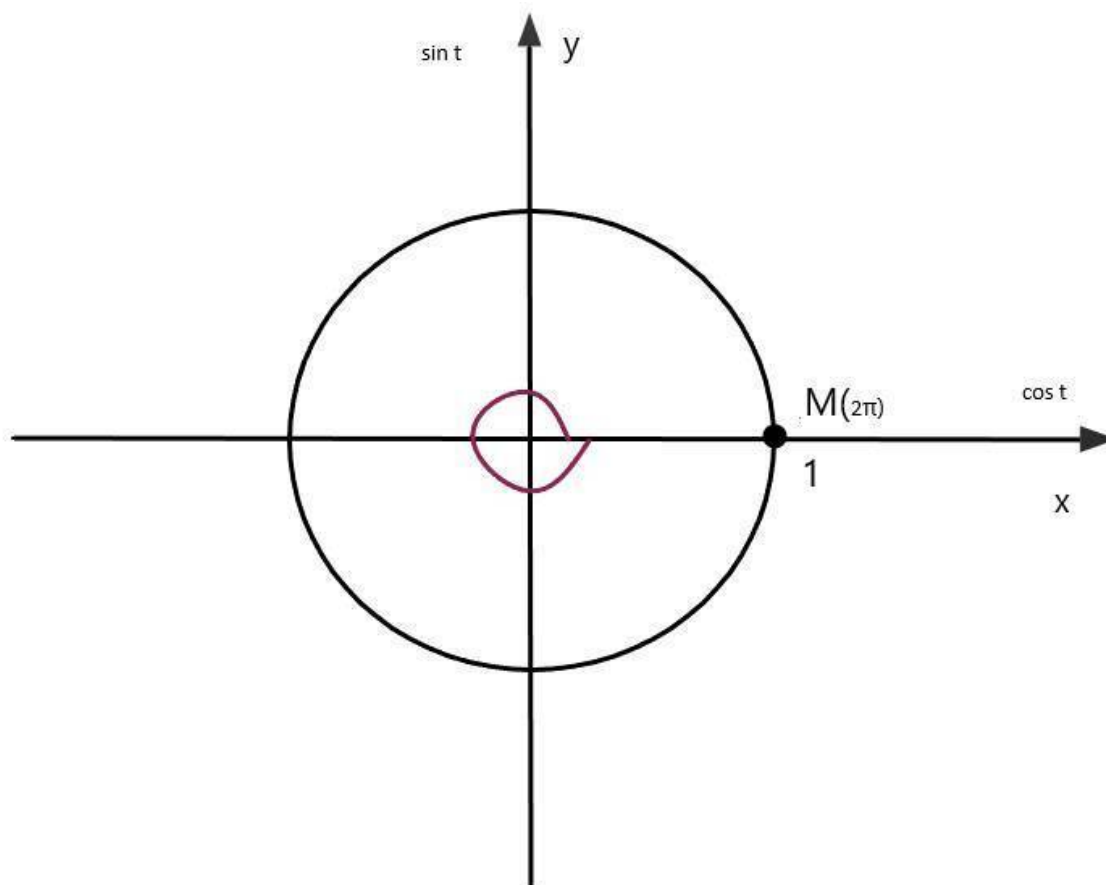
Центр числовой единичной окружности совпадает с началом координат, координатной плоскости $ХОУ$. Найдите, декартовы координаты заданной точки. $M(\pi/4)$



Ответ: $M(\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2)$

Пример два.

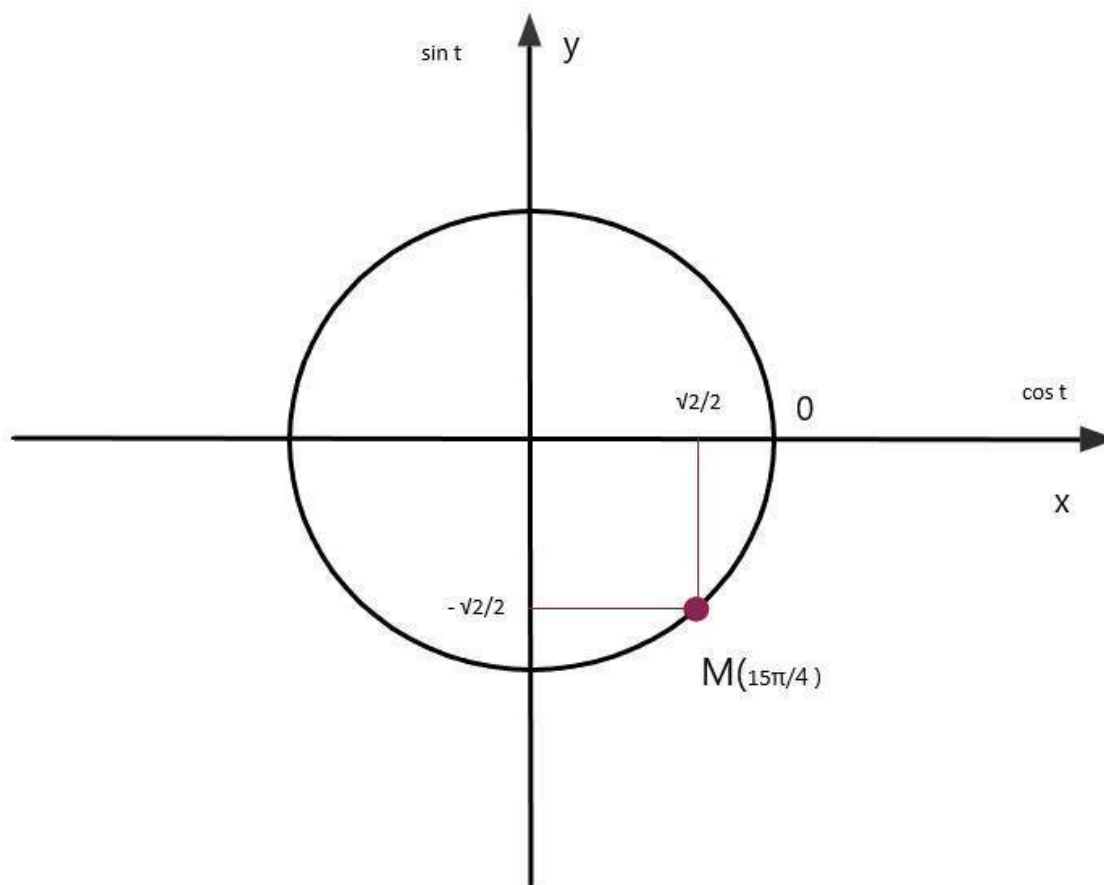
$M(2\pi)$



Ответ: $M(1; 0)$

Пример три.

$M(15\pi/4)$

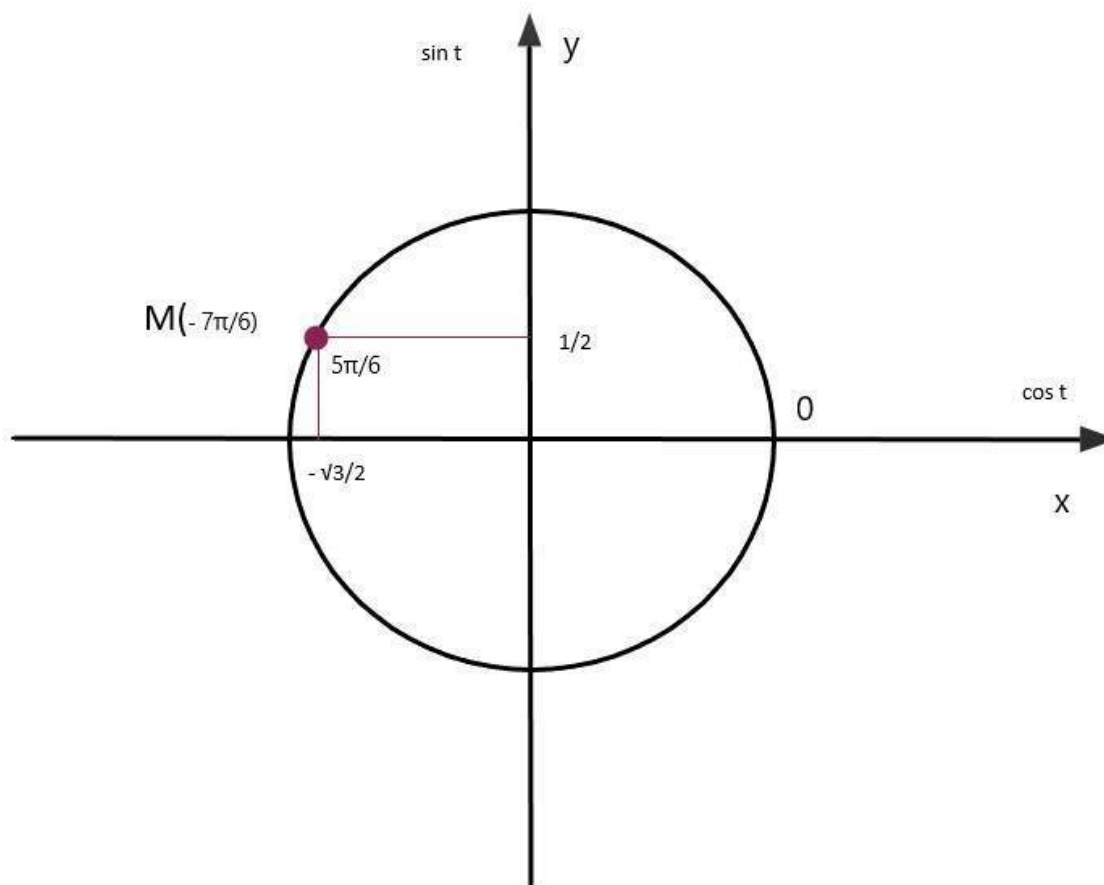


Ответ: $M(\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2)$

Пример четыре.

Найти наименьшее положительное число и наибольшее отрицательное число, которым на числовой окружности соответствует точка, с декартовыми координатами. (Найти полярные координаты).

$M(-\sqrt{3}/2; 1/2)$



Ответ: $5\pi/6$ и $-7\pi/6$.

Пример пять.

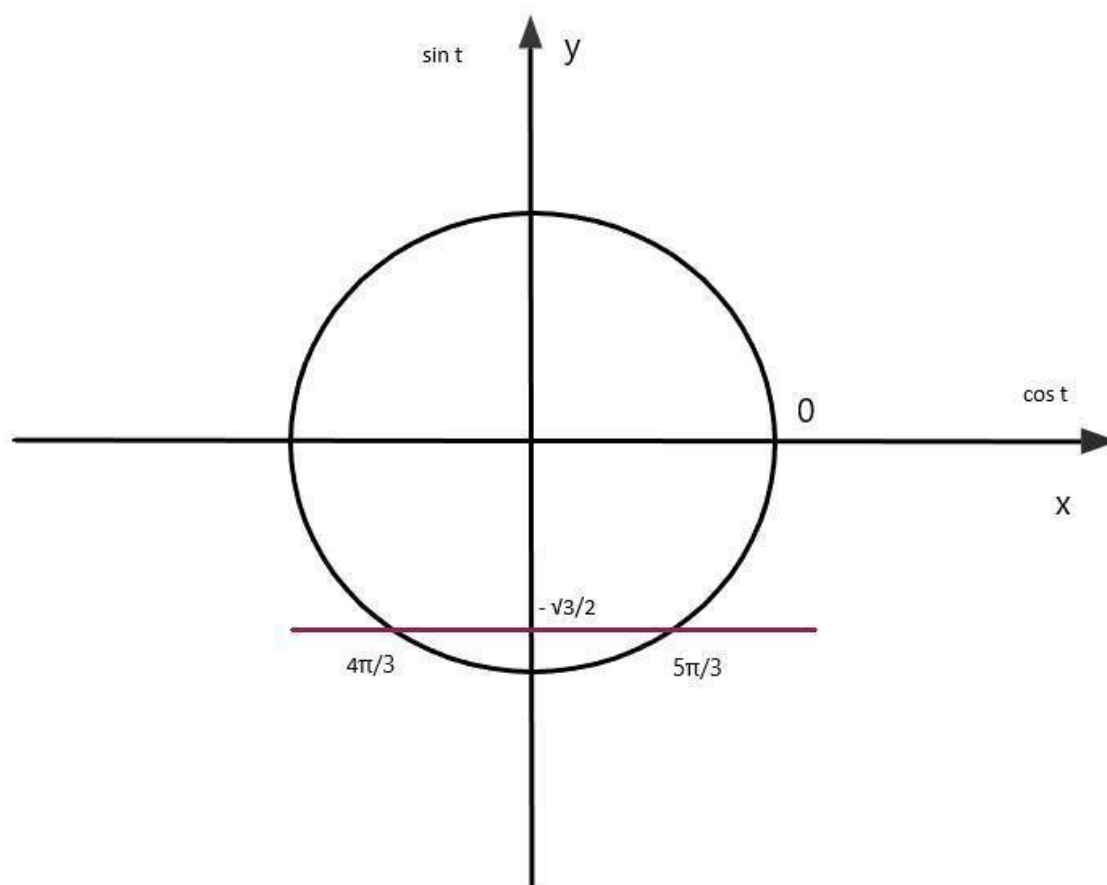
Найдите на числовой окружности точки с данной координатой. И запишите, каким числом t они соответствуют.

а) $y = -\sqrt{3}/2$

б) $y = 0$

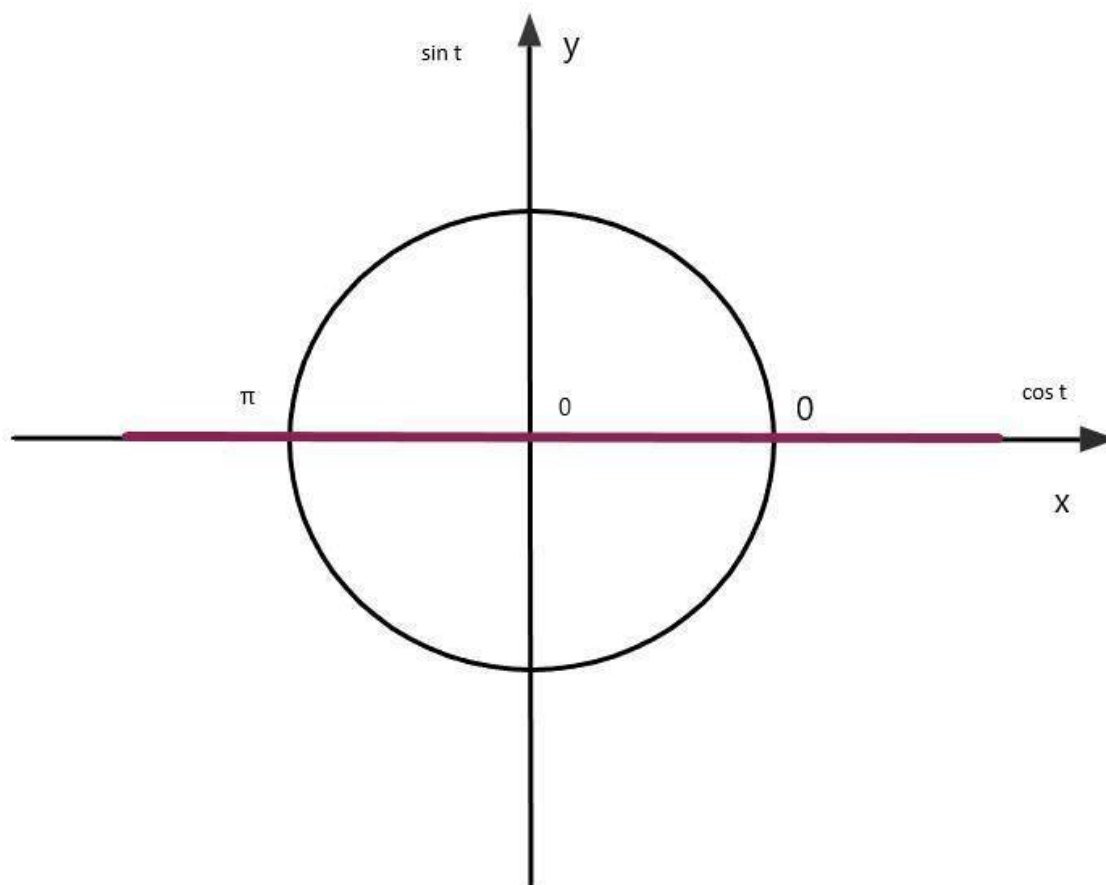
в) $y = 1$

а) $y = \sqrt{3}/2$

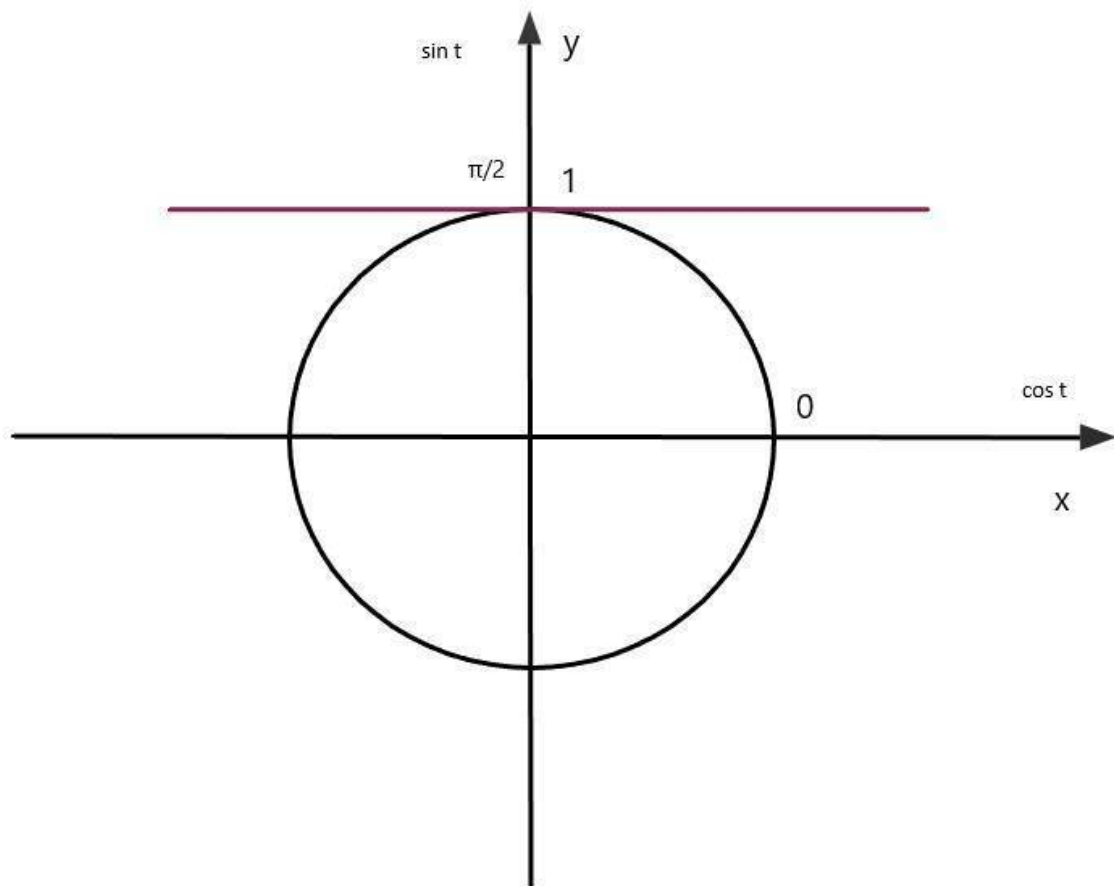


Ответ: $4\pi/3 + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$ и $5\pi/3 + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

б) $y = 0$



Ответ: πn ; $n \in \mathbb{Z}$
в) $y = 1$



Ответ: $\pi/2 + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

Пример шесть.

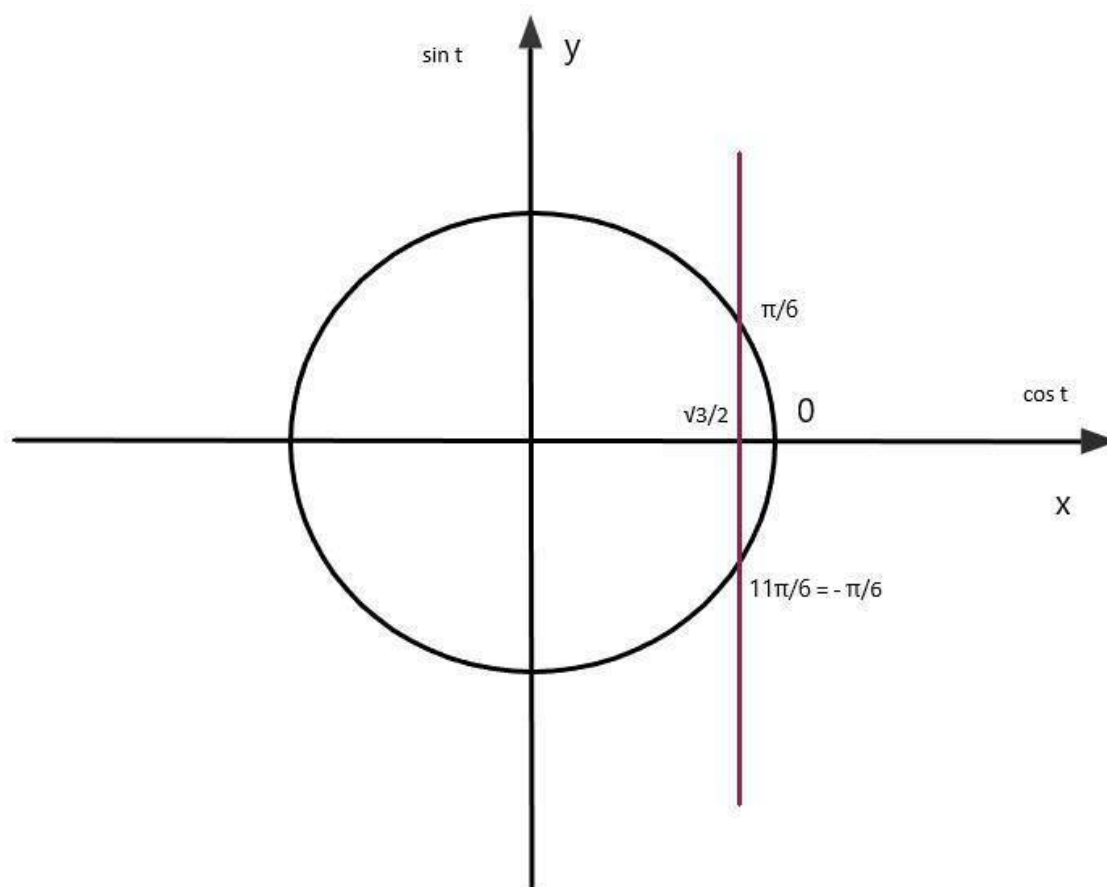
Найдите на числовой окружности точки с координатой абсциссы и запишите, каким числам t они соответствуют.

а) $x = \sqrt{3}/2$

б) $x = -1$

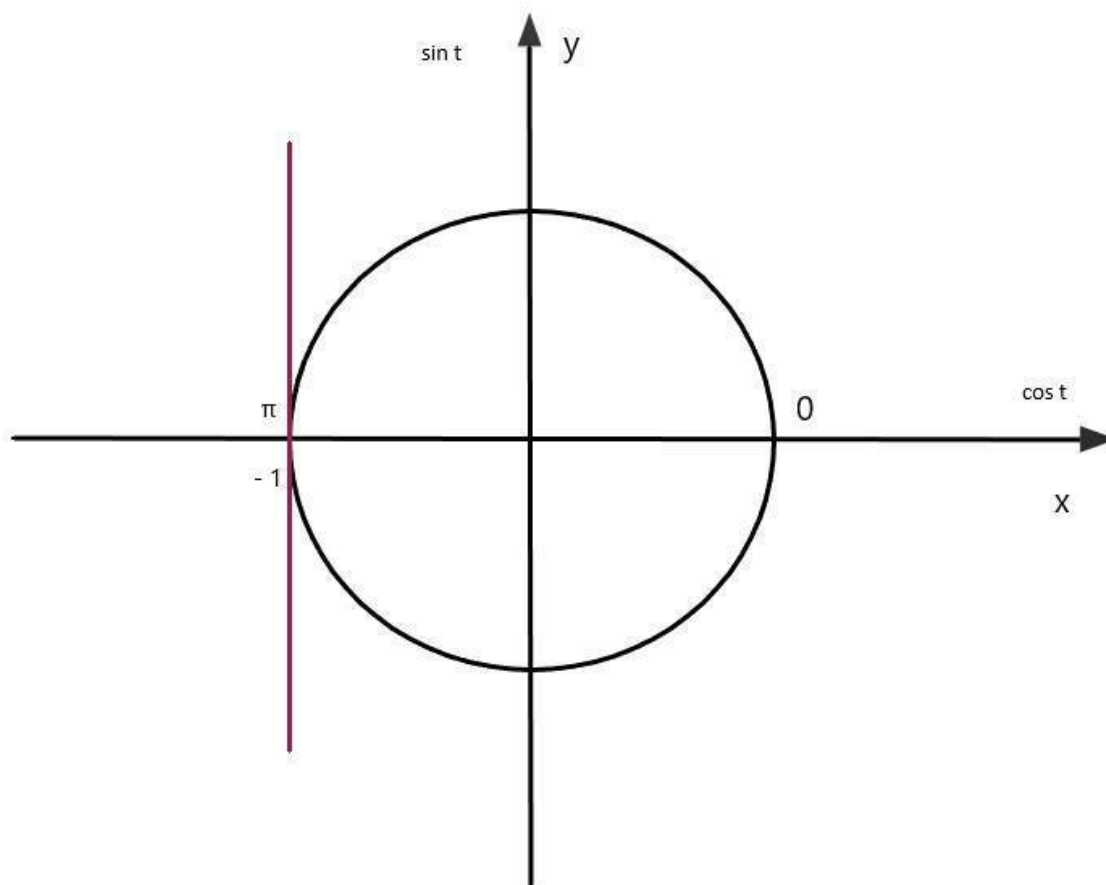
в) $x = 0$

а) $x = \sqrt{3}/2$



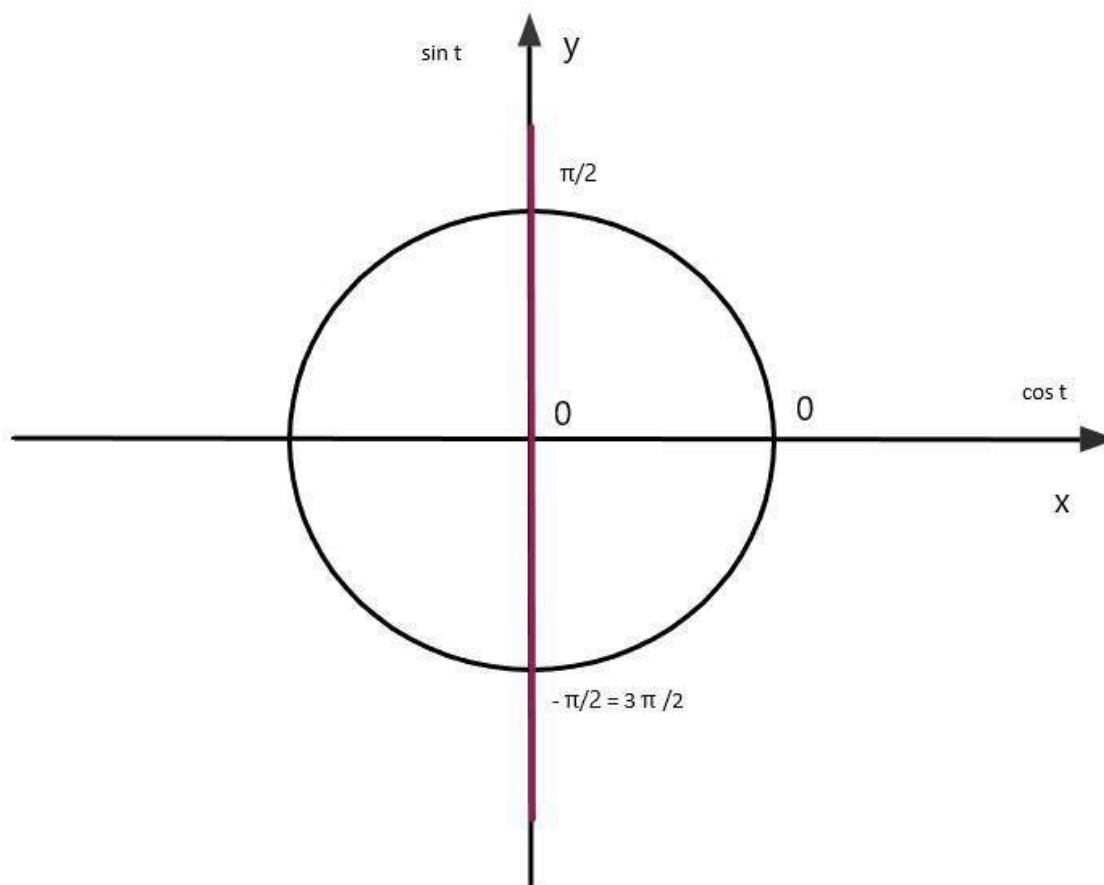
Ответ: $\pm \pi/6 + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$.

б) $x = -1$



Ответ: $\pi + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$.

в) $x = 0$

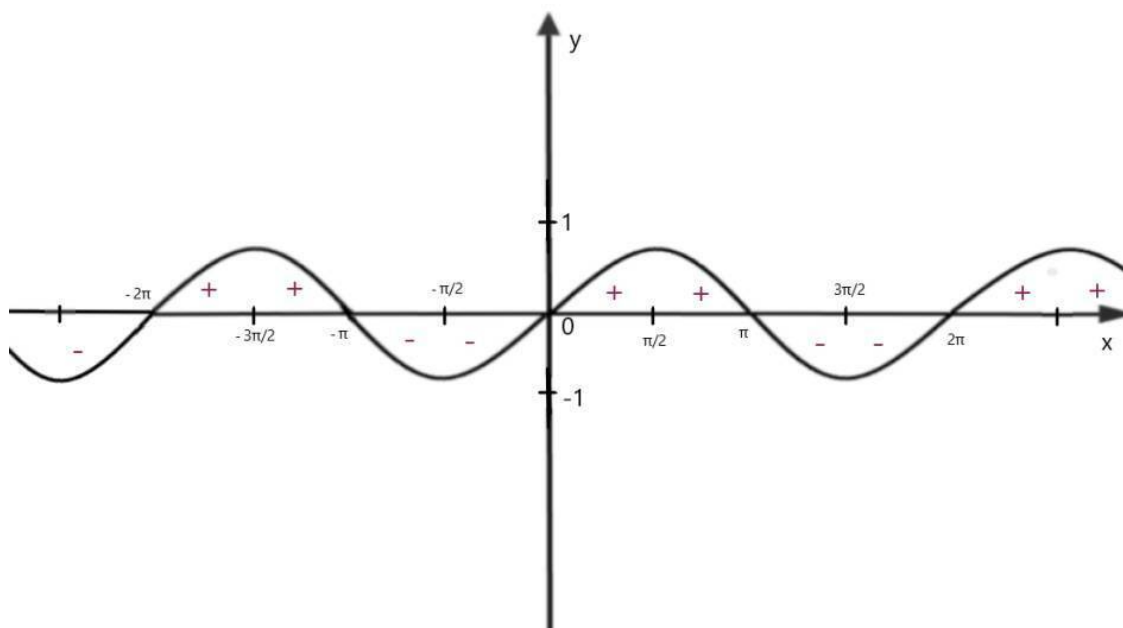


Ответ: $\pi/2 + \pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

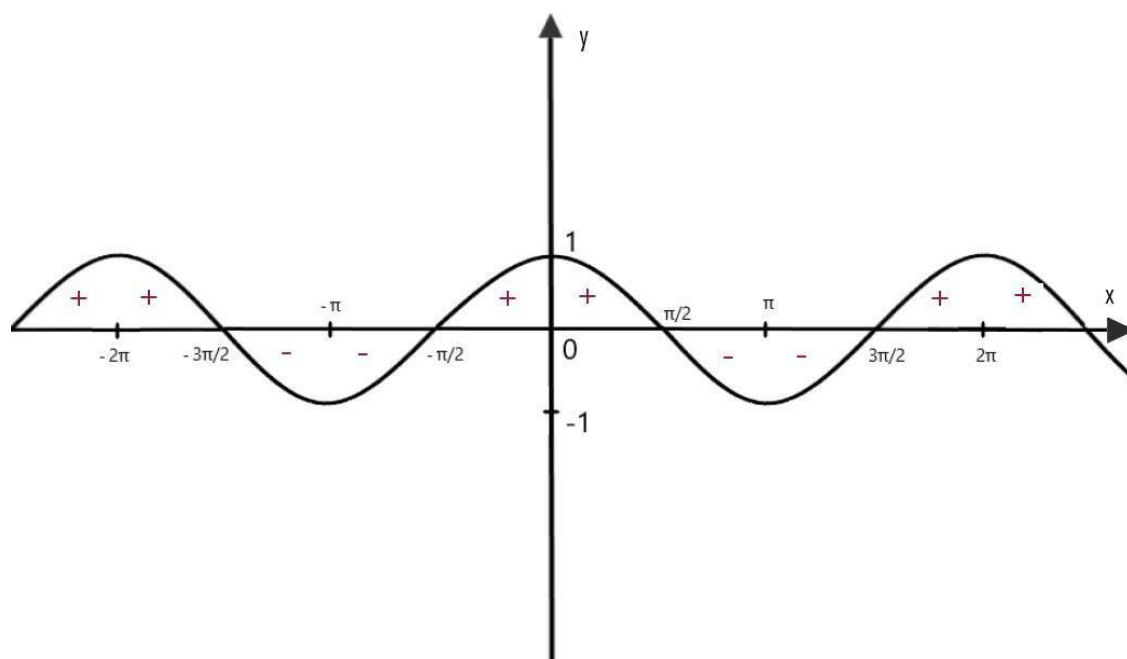
4. Знаки функции в четвертях.

При переходе через значения $\pi/2$; π ; $3\pi/2$; 2π тригонометрические функции, могут менять знаки своих значений.

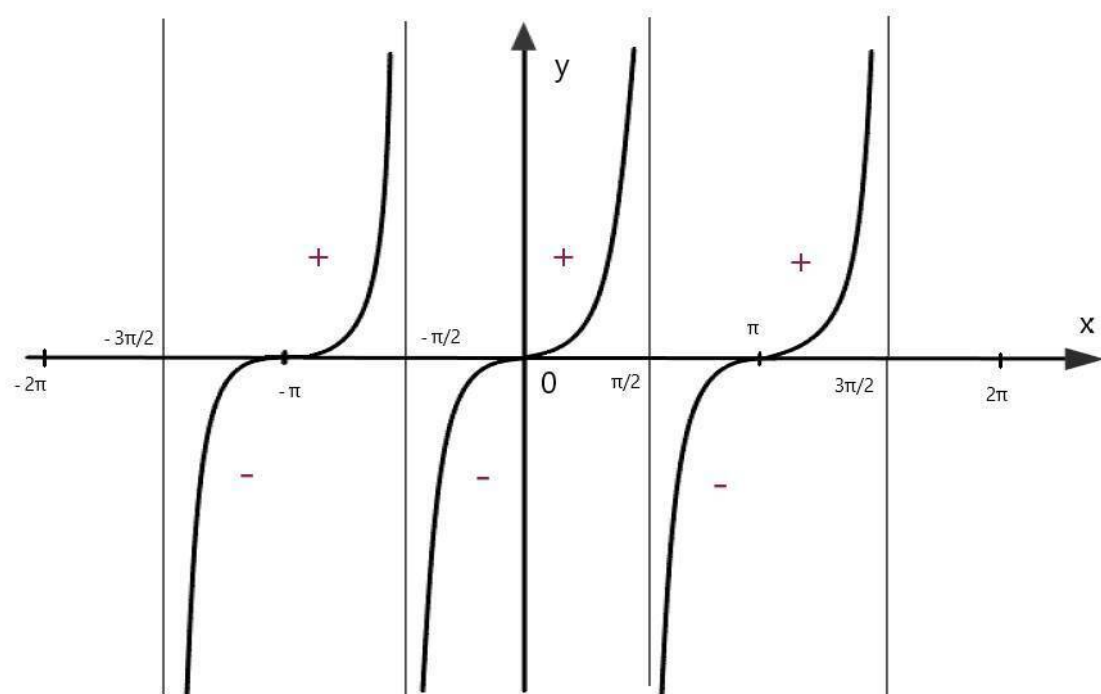
1) $y = \sin x$



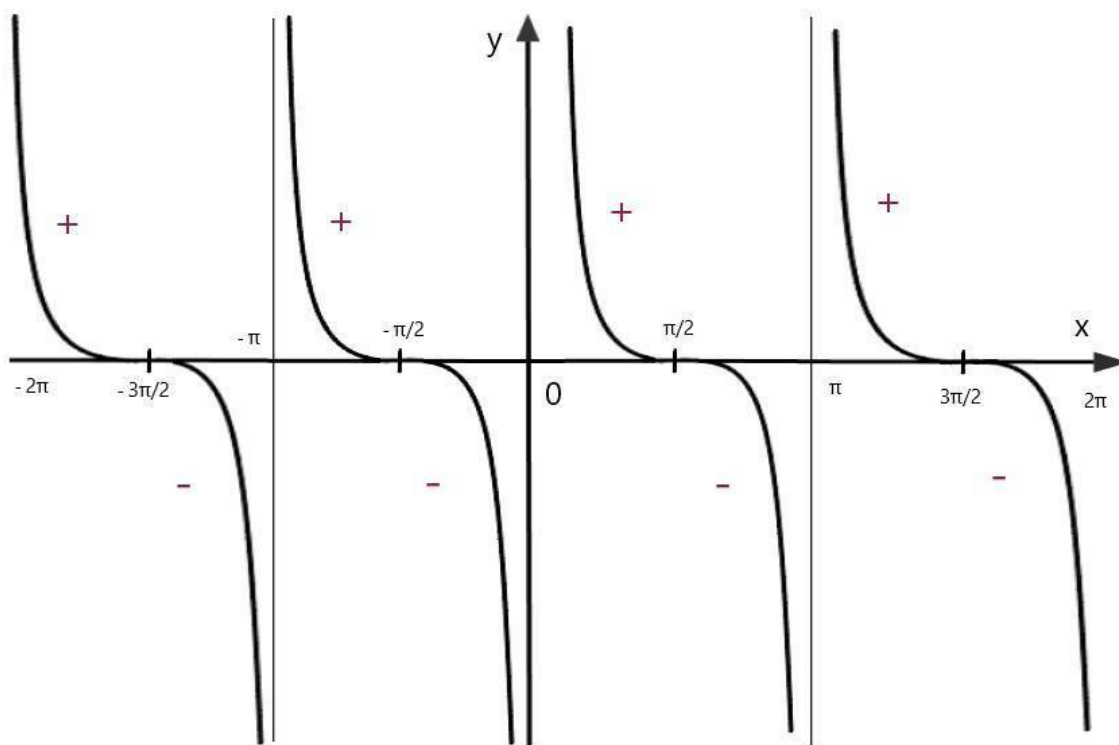
2) $y = \cos x$



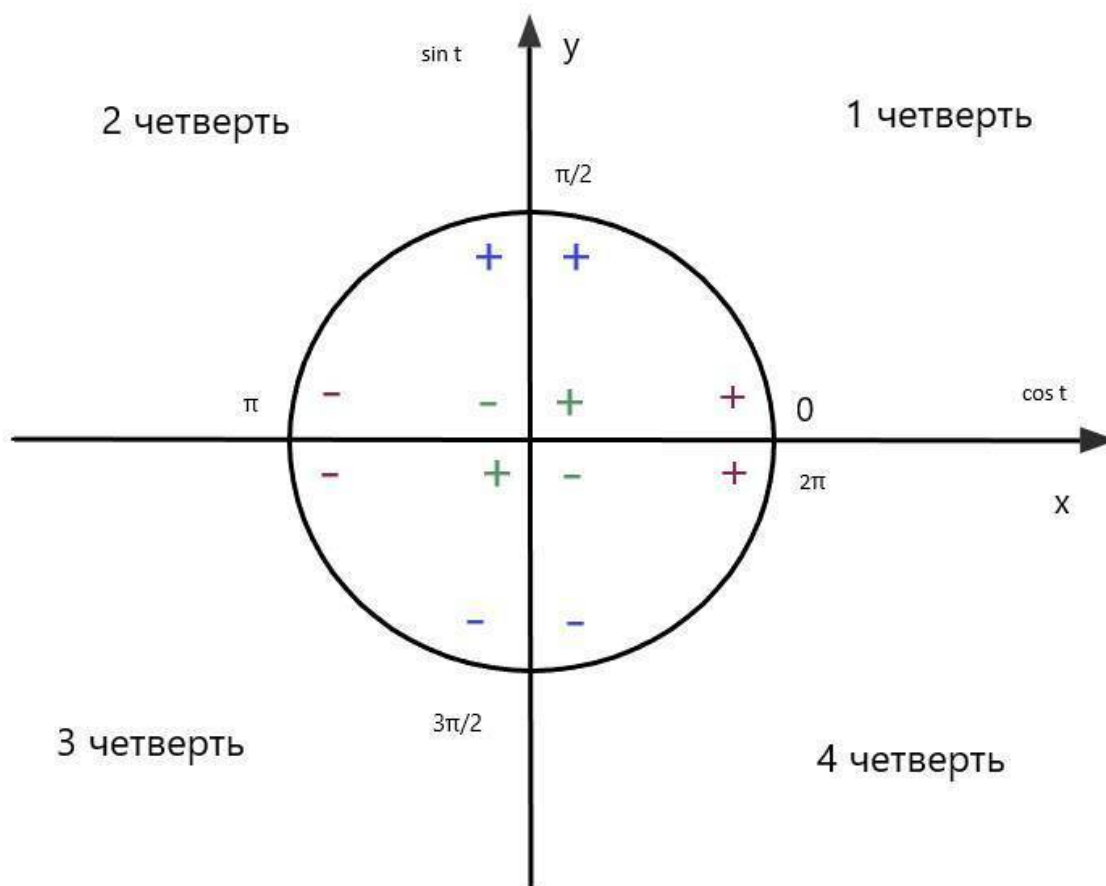
3) $y = \operatorname{tg} x$



4) $y = \operatorname{ctg} x$



Эти знаки значений функций, легче определять на числовой окружности, чем на координатной плоскости.



Для косинуса и синуса ставятся знаки плюс, в положительном направлении осей. А в отрицательном направлении осей, ставятся знаки минус.

Для тангенса и котангенса, знаки ставятся ближе к середине окружности.

Они чередуются, начиная с плюсов в первой четверти.

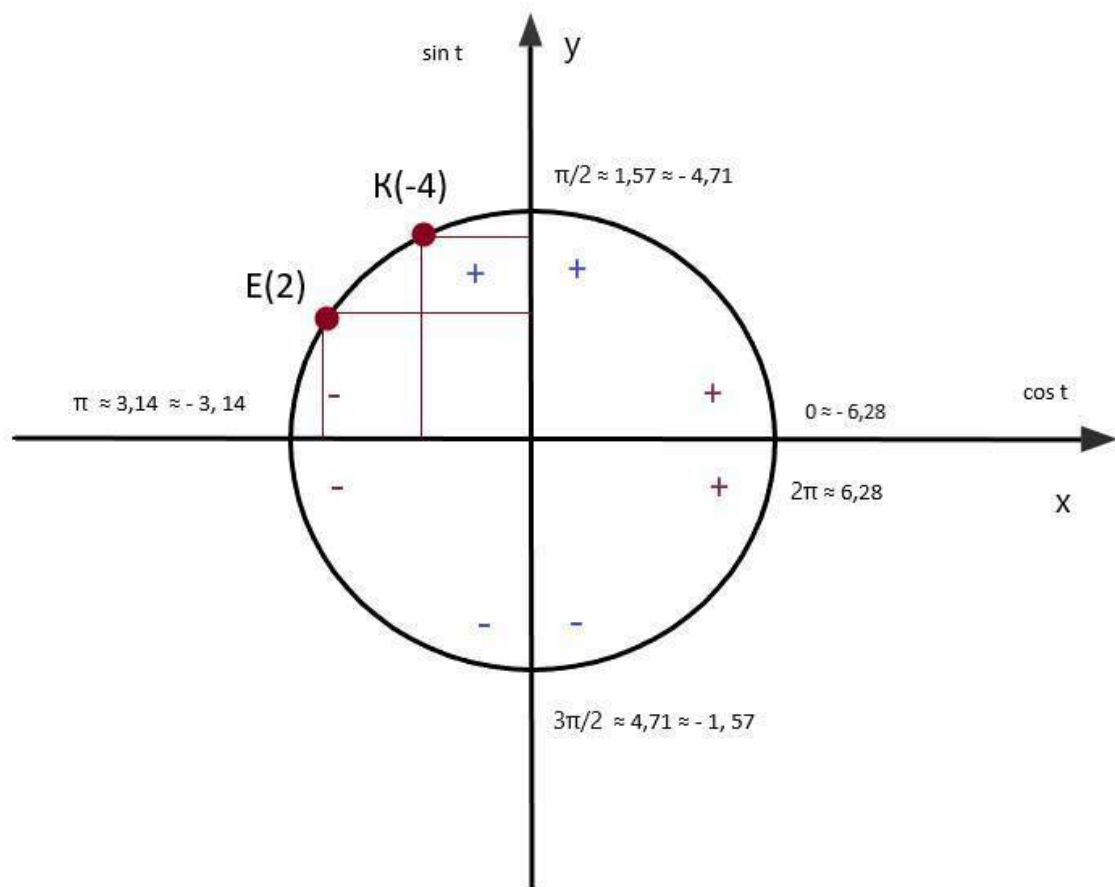
5. Числовые промежутки на окружности.

Пример один.

Укажите знаки абсциссы и ординаты точки числовой окружности.

а) Е (2)

б) К (-4)



В этой задаче абсциссой точки является ось x , то есть ось косинусов ($\cos t$). Ординатой является ось y , то есть ось синусов ($\sin t$)

$\pi \approx 3,14$ - это иррациональное число.

Точно π вычислить невозможно. Так как это бесконечная не периодическая дробь. Но нам и не нужна точность. Нам нужно только определить, между какими значениями находится число. А потом просто нужно определить знаки синуса и косинуса, в этих четвертях.

Ответ:

а) абсцисса отрицательная, ордината положительная.

б) абсцисса отрицательная, ордината положительная.

Если число больше 6,28; то из него нужно вычесть это число, столько раз, пока число не станет меньше чем 6,28.

А затем нужно отметить его на числовой окружности.

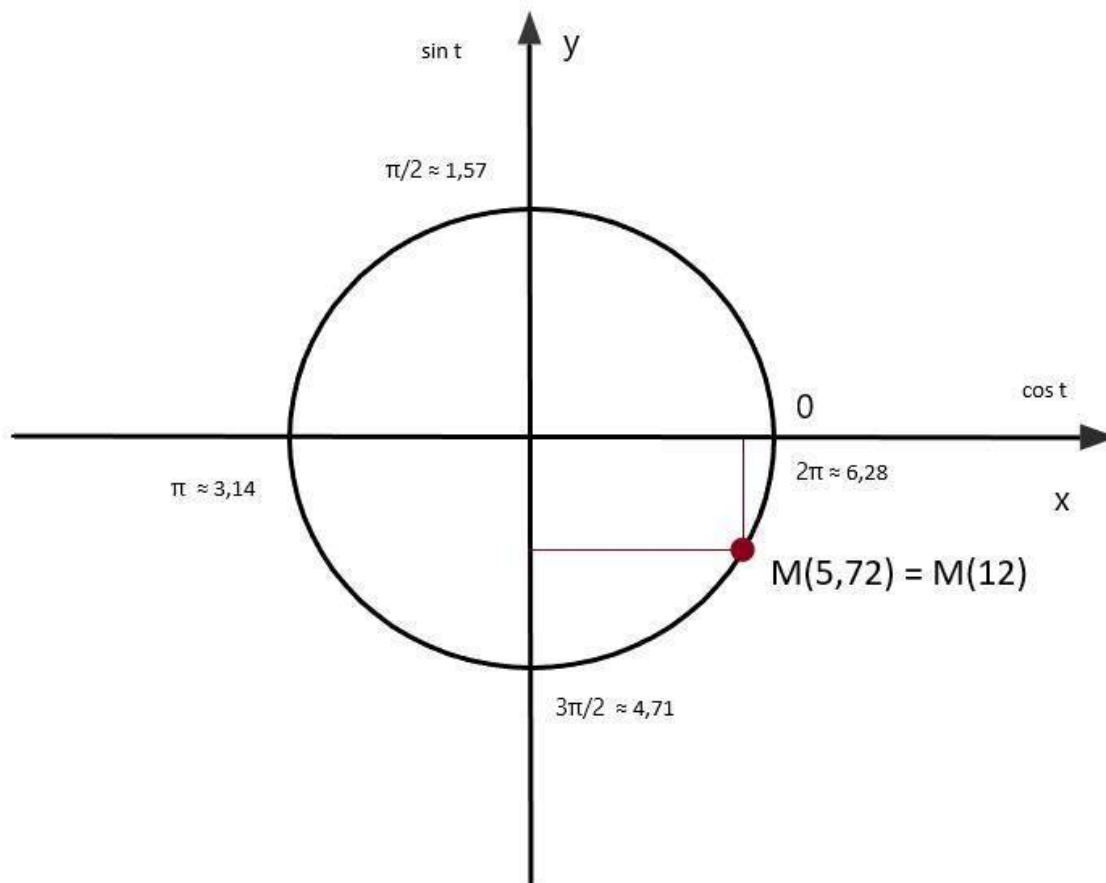
Пример два.

Укажите знаки абсциссы и ординаты точки числовой окружности.

а) $M(12)$

б) $P(52)$

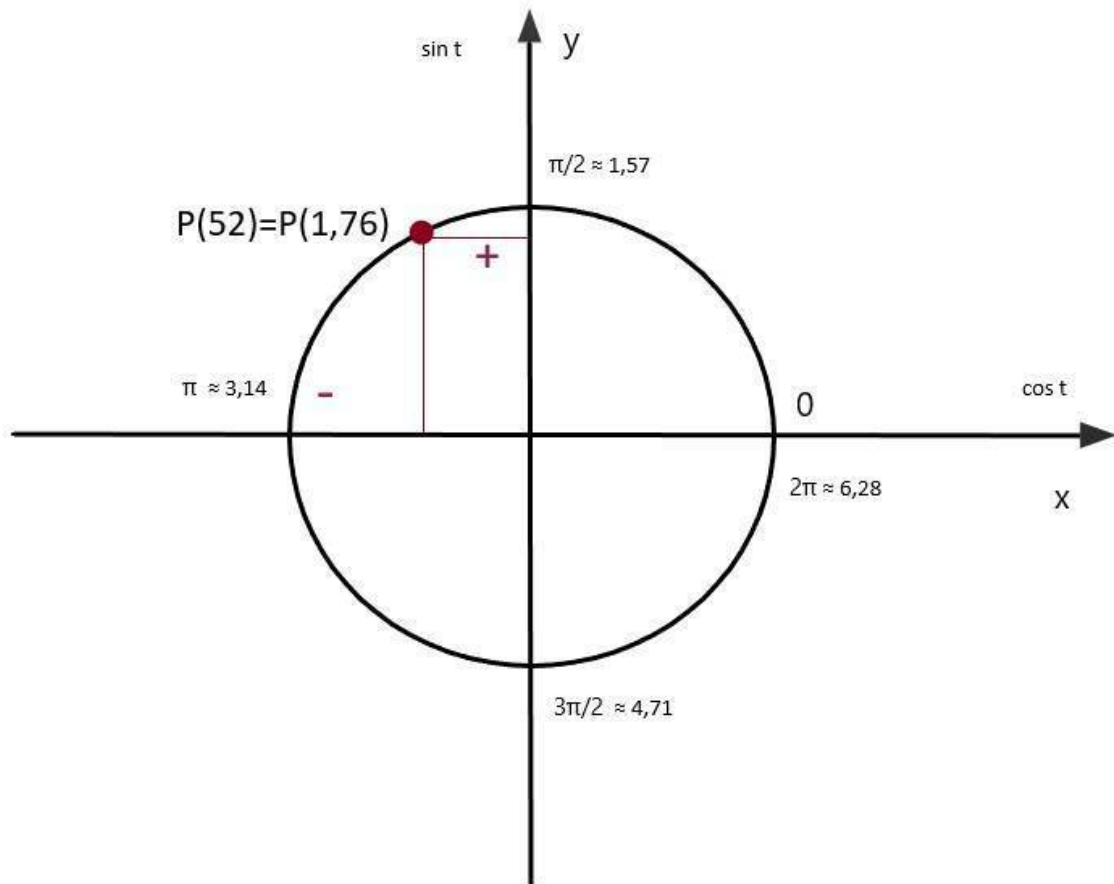
а) $M(12)$



$$M(12) \approx M(12 - 6,28) \approx M(5,72)$$

Ответ: абсцисса точки положительная, ордината точки отрицательная.

$$\text{б) } P(52) \approx P(52 - 6,28 \times 8) \approx P(1,76)$$



Ответ: абсцисса отрицательная, ордината положительная.

Неравенство определения дуг числовых промежутков на окружности.

Числовые оси x и y - это оси значений синуса и косинуса.

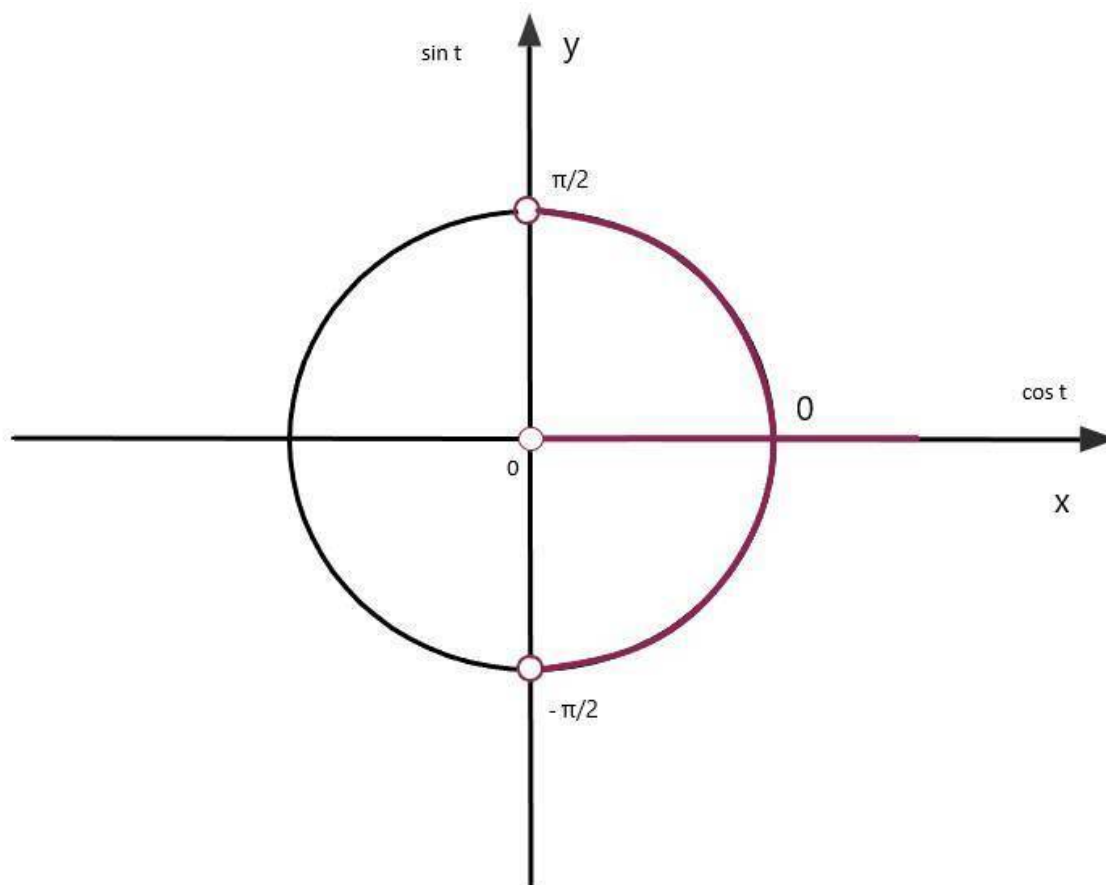
Абсциссы - это значение косинуса.

Ординаты - это значение синуса.

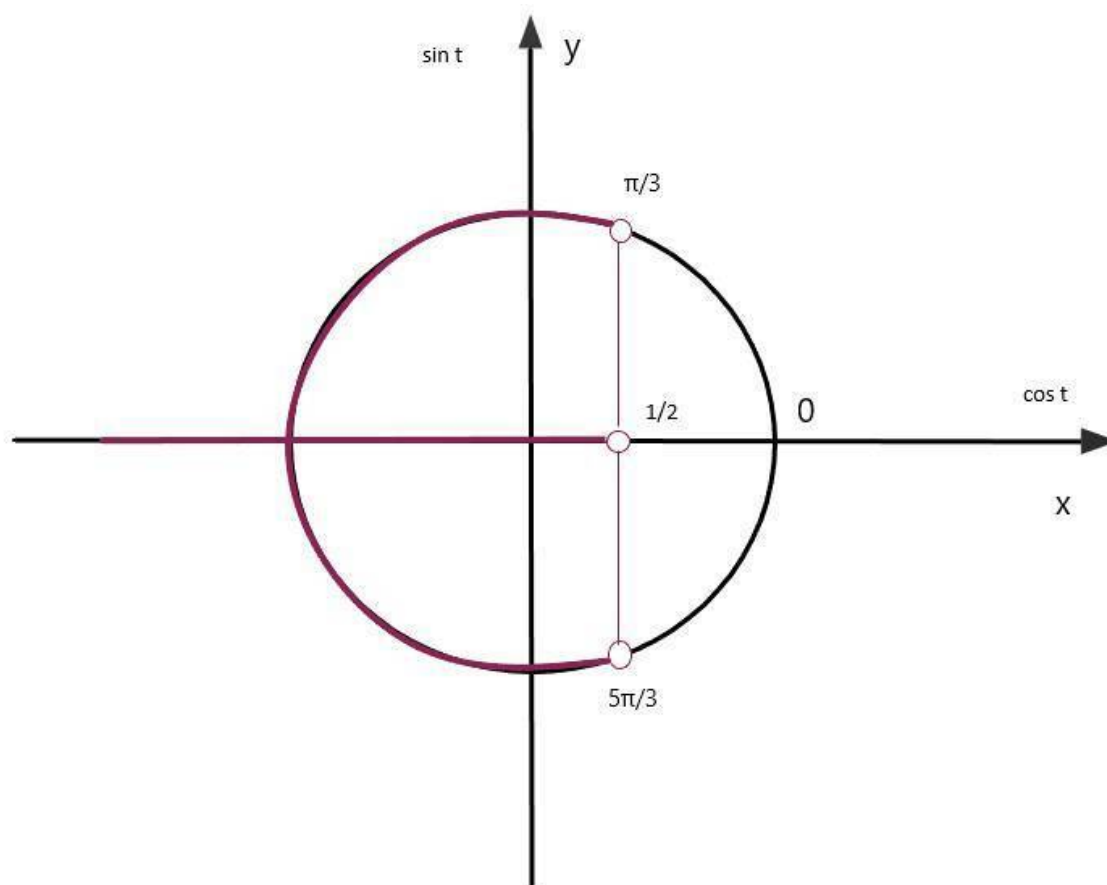
Пример один.

Найдите на числовой окружности точки с абсциссой или с ординатой, удовлетворяющей заданному неравенству. И запишите с помощью двойного неравенства, каким числам t они соответствуют.

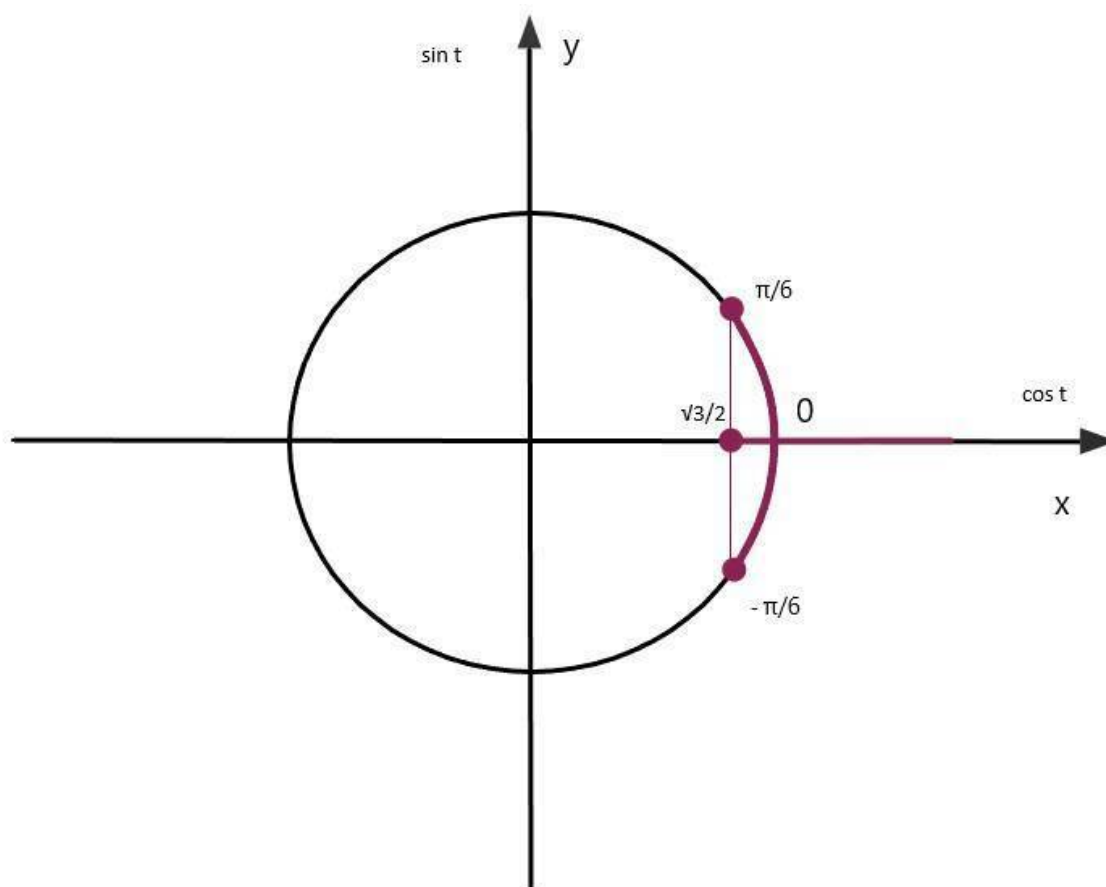
- а) $x > 0$
- б) $x < 1/2$
- в) $x \geq \sqrt{3}/2$
- г) $x \leq 1/2$
- д) $y < 0$
- е) $y < \sqrt{3}/2$
- ж) $y \geq -1$
- з) $y < 1$
- а) $x > 0$



Ответ: $t \in (-\pi/2 + 2\pi n; \pi/2 + 2\pi n); n \in \mathbb{Z}$.
б) $x < 1/2$

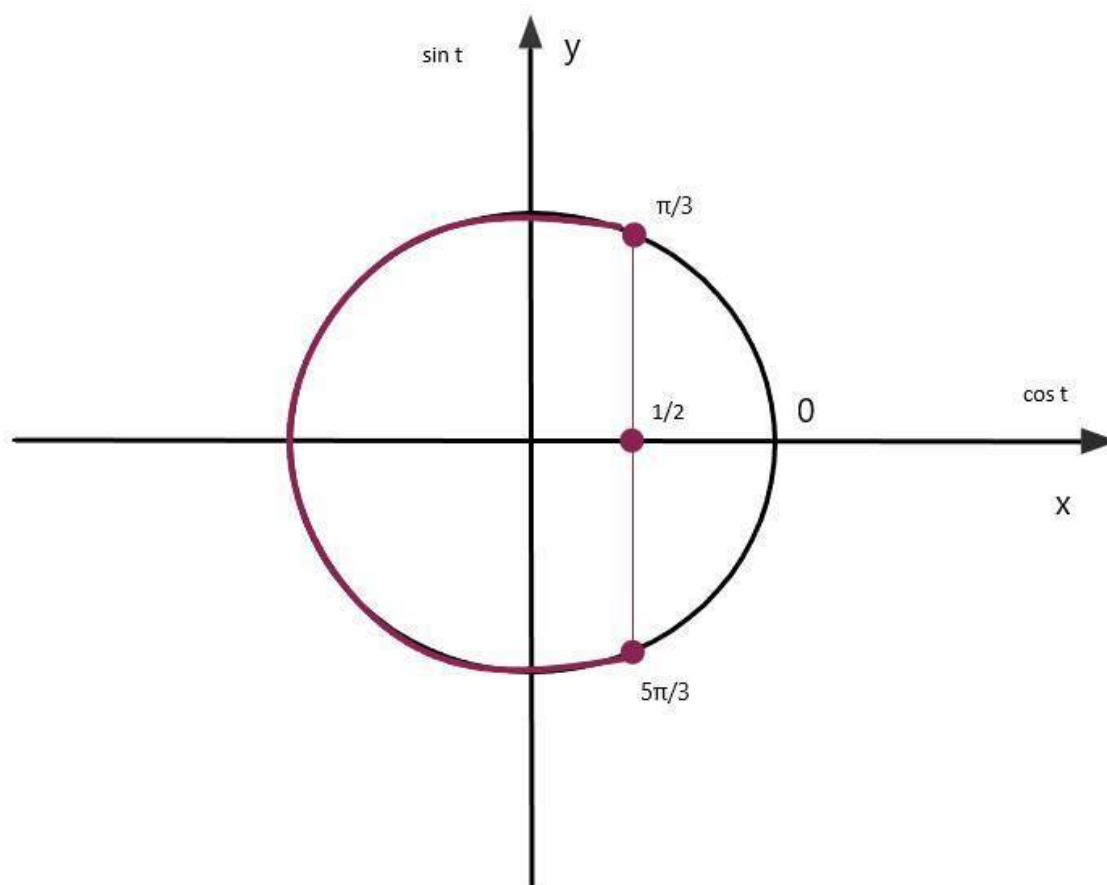


Ответ: $t \in (\pi/3 + 2\pi n; 5\pi/3 + 2\pi n); n \in \mathbb{Z}$.
в) $x \geq \sqrt{3}/2$

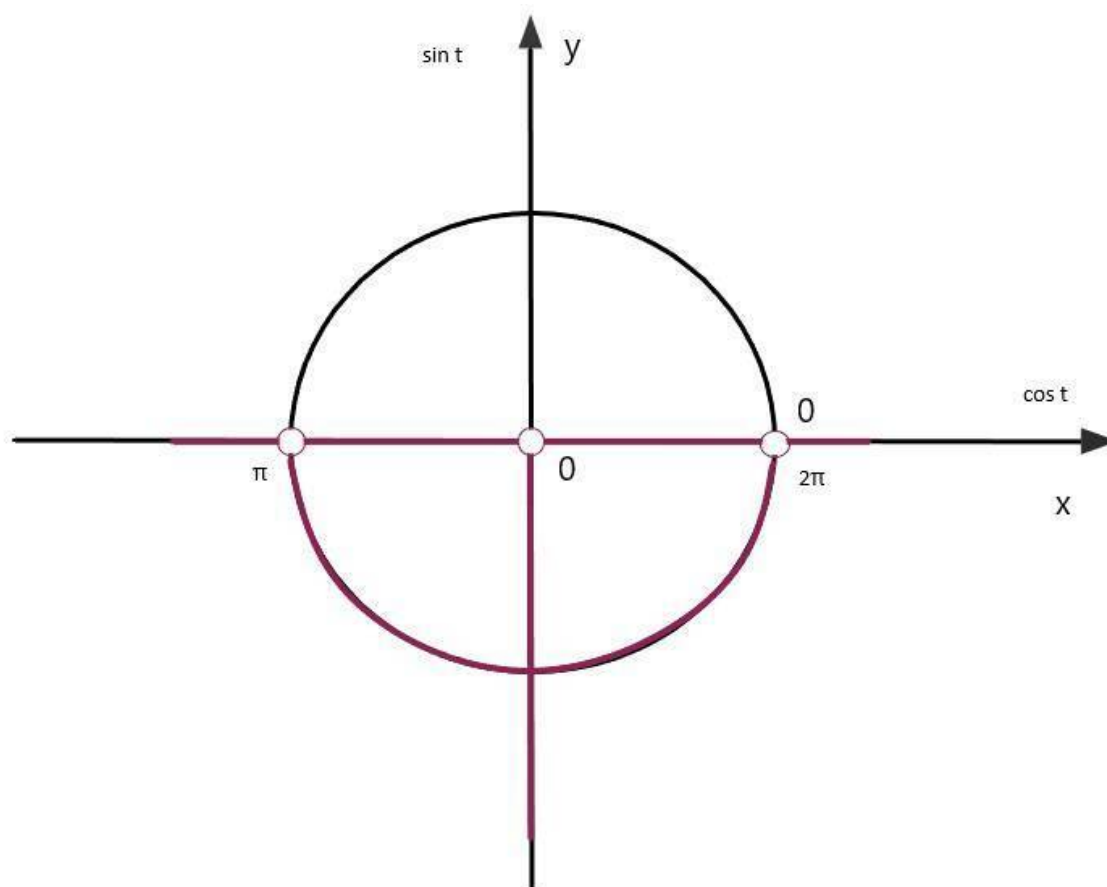


Ответ: $t \in [-\pi/6 + 2\pi n; \pi/6 + 2\pi n]; n \in \mathbb{Z}$.

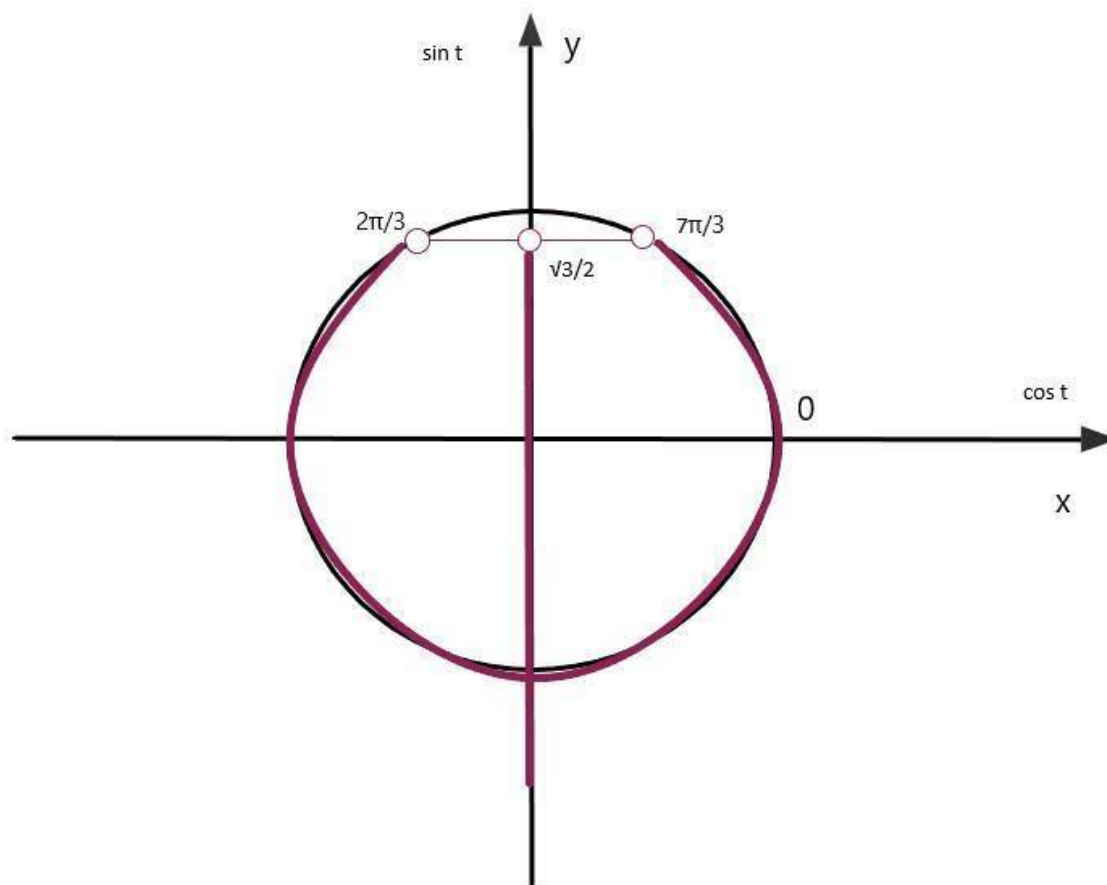
г) $x \leq 1/2$



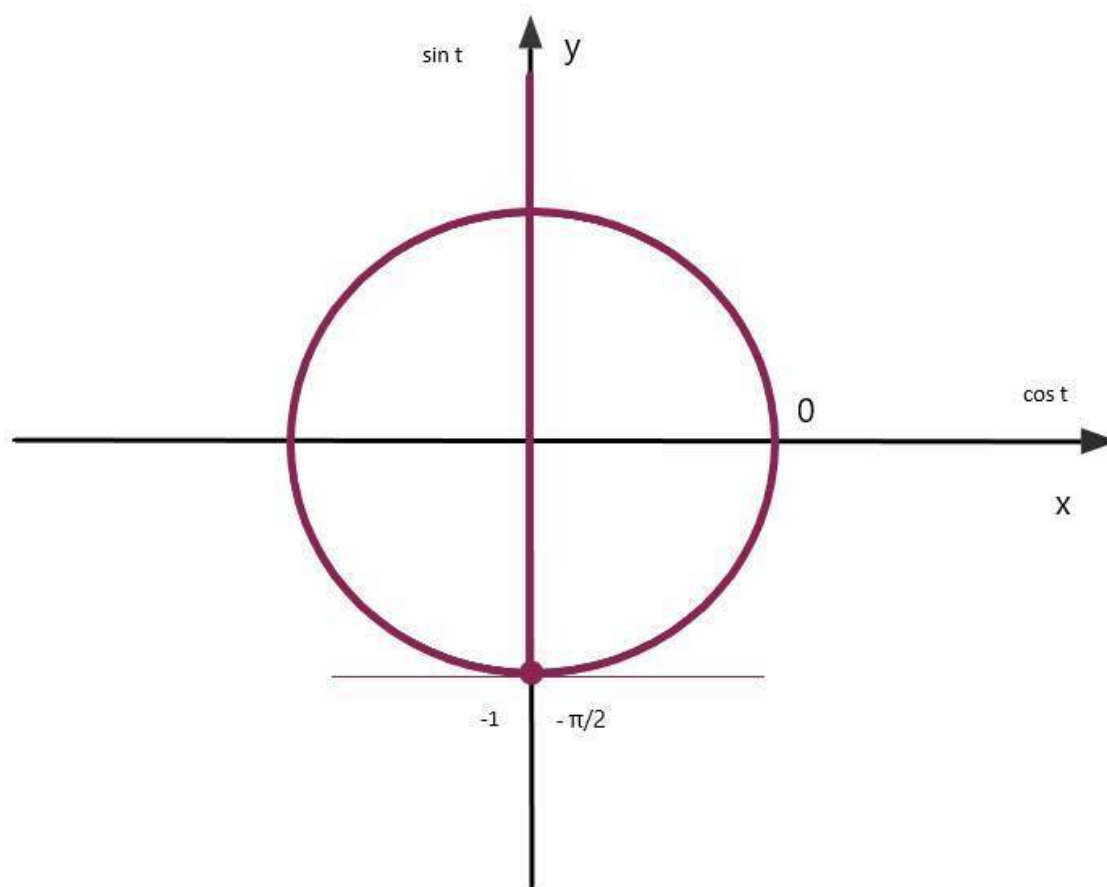
Ответ: $t \in [\pi/3 + 2\pi n; 5\pi/3 + 2\pi n]; n \in \mathbb{Z}$.
д) $y < 0$



Ответ: $t \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n); n \in \mathbb{Z}$.
е) $y < \sqrt{3}/2$

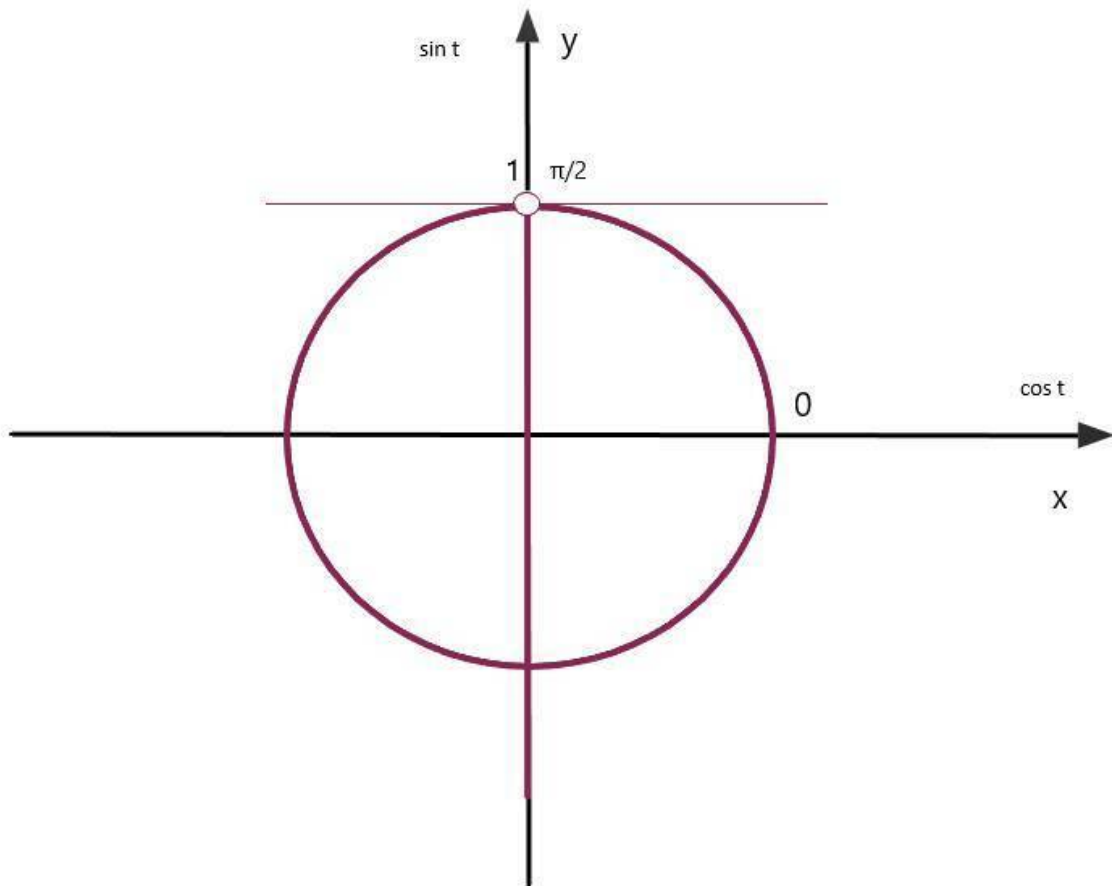


Ответ: $t \in (2\pi/3 + 2\pi n; 7\pi/3 + 2\pi n); n \in \mathbb{Z}$.
 ж) $y \geq -1$



Ответ: $t \in (-\infty; +\infty)$

3) $y < 1$



Ответ: $t \neq \pi/2 + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

6. Синус и косинус, тангенс и котангенс, на числовой окружности.

Оси x поставлено в соответствие значения косинуса.

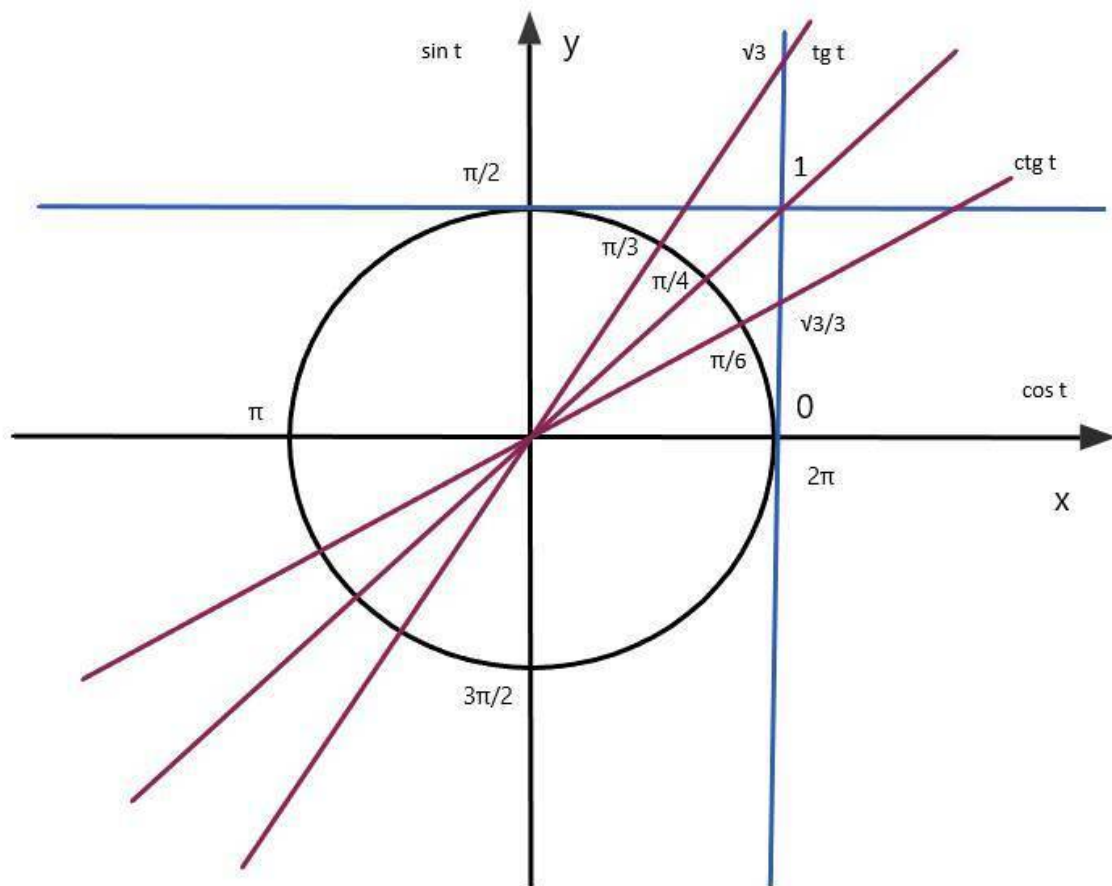
Оси y поставлено в соответствие значение синуса.

По окружности числа мы будем обозначать буквой t (это полярные координаты, выраженные в радианах).

Аргумент под косинусом и под синусом будет t .

Теперь просто вместо ординаты (y) и абсциссы (x), будут обозначения: $\sin t$ и $\cos t$

Оси тангенса и котангенса, будут располагаться параллельно осям x ($\cos t$) и y ($\sin t$), и будут касаться окружности.



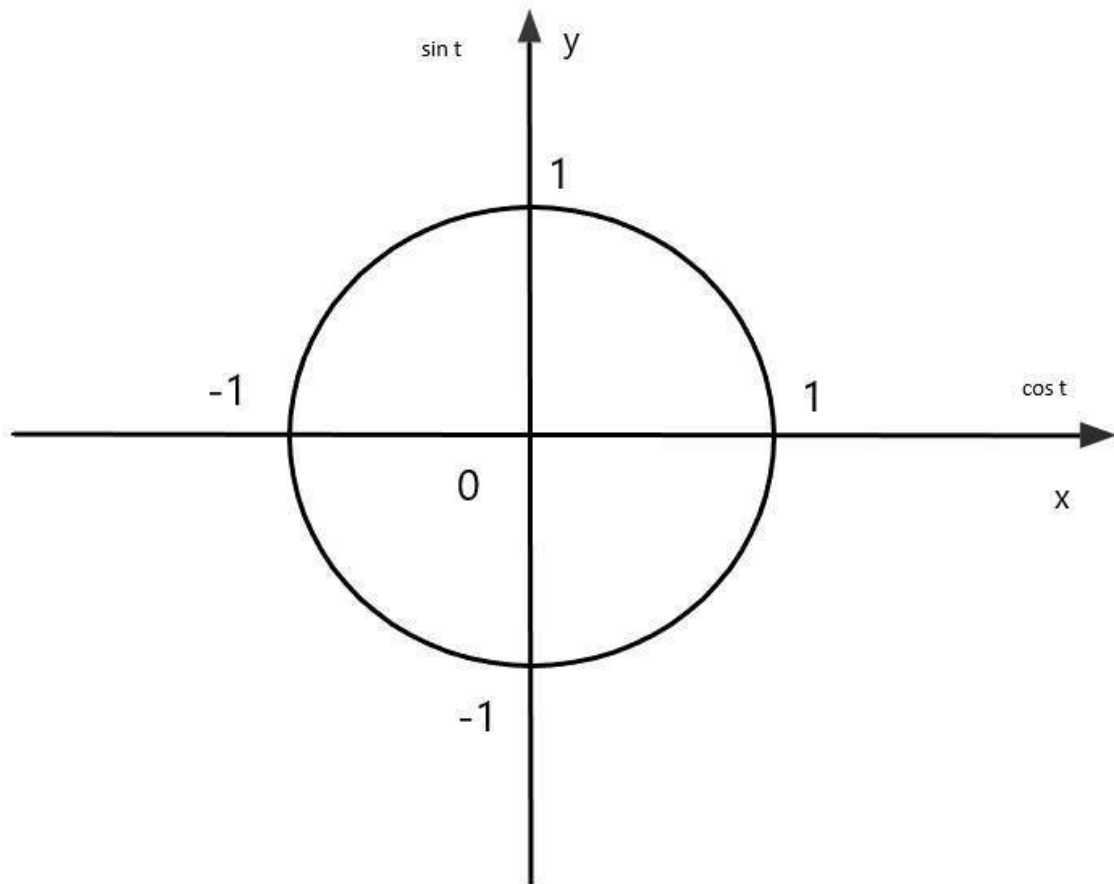
Для того чтобы найти значения $\tan t$ и $\cot t$, нужно провести секущую через точку на окружности и центр окружности.

7. Первоначальные тригонометрические формулы.

1)) Основное тригонометрическое тождество.

Основное тригонометрическое тождество, получается из единичной тригонометрической окружности.

Центр тригонометрической окружности, находится в начале координат, декартовой плоскости $ХОУ$.



Уравнение окружности с центром в начале координат, вычисляется по формуле:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Радиус окружности $R = 1$

Осям x и y ставятся в соответствие функции: $x = \cos t$; $y = \sin t$.

Отсюда и получается тождество:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

2)) Тангенс и котангенс.

Тангенс - это отношение синуса к косинусу.

$$\operatorname{tg} t = \sin t / \cos t$$

Котангенс - это отношение косинуса к синусу.

$$\operatorname{ctg} t = \cos t / \sin t$$

Следовательно, тангенс и котангенс, взаимно обратные функции.

$$\operatorname{tg} t = 1 / \operatorname{ctg} t$$

$$\operatorname{ctg} t = 1 / \operatorname{tg} t$$

Отсюда следует формула.

$$\operatorname{tg} t \operatorname{ctg} t = 1$$

Произведение тангенса и котангенса равно единице.

8. Формулы, полученные из основного тригонометрического тождества.

$$1 + \operatorname{tg}^2 t = 1 / \cos^2 t$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 t = 1 / \sin^2 t$$

Эти формулы можно преобразовывать по-разному.

$$\operatorname{tg}^2 t = (1 / \cos^2 t) - 1$$

$$\operatorname{ctg}^2 t = (1 / \sin^2 t) - 1$$

Если выразить из них квадрат синуса и косинуса, то получим формулы перехода к тангенсу и к котангенсу.

$$\cos^2 t = 1 / (1 + \operatorname{tg}^2 t)$$

$$\cos^2 t = \operatorname{ctg}^2 t / (1 + \operatorname{ctg}^2 t)$$

$$\sin^2 t = 1 / (1 + \operatorname{ctg}^2 t)$$

$$\sin^2 t = \operatorname{tg}^2 t / (1 + \operatorname{tg}^2 t)$$

9. Формулы двойного аргумента.

В тригонометрии много формул, которые трудно запомнить. Но если к ним придумать правила и запоминки, то их будет легче запомнить (хотя бы основные).

1)) Синус двойного аргумента.

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t$$

Так как привычнее решать уравнения с переменной x , то вместо t можно подставлять и x .

Самое главное эту переменную (x) не перепутать с осью Ox , которой соответствует значение функции $y = \cos x$.

При решении уравнений на тригонометрической окружности, оси будут обозначаться $\cos x$, $\sin x$.

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Синус двойного аргумента равен, удвоенному произведению синуса и косинуса, от этого аргумента.

2)) Косинус двойного аргумента.

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Косинус двойного аргумента равен, разности квадратов косинуса и синуса, от этого аргумента.

Применив основное тригонометрическое тождество, можно получить ещё две формулы, косинуса двойного аргумента.

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

Запоминалка:

В первой формуле перед квадратом синуса, стоит минус. Значит в другой формуле перед удвоенным квадратом синуса, тоже стоит минус.

Из единицы вычитаем удвоенный квадрат синуса.

Тогда в следующей формуле. Из удвоенного квадрата косинуса, вычитаем единицу.

3)) Тангенс двойного аргумента.

$$1) \operatorname{tg} 2x = 2 \operatorname{tg} x / (1 - \operatorname{tg}^2 x)$$

Тангенс двойного аргумента равен, отношению удвоенного тангенса, к единице минус квадрат тангенса от этого аргумента.

$$2) \operatorname{tg} 2x = 2 / (\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x)$$

Тангенс двойного аргумента равен, отношению двойки, к разности котангенса и тангенса от этого аргумента.

4)) Котангенс двойного аргумента.

$$1) \operatorname{ctg} 2x = (\operatorname{ctg}^2 x - 1) / 2 \operatorname{ctg} x$$

Котангенс двойного аргумента, равен отношению разности квадрата котангенса и единицы, к удвоенному котангенсу.

$$2) \operatorname{ctg} 2x = (\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x) / 2$$

Котангенс двойного аргумента равен, полу разности котангенса и тангенса от этого аргумента.

10. Формулы понижения степени.

Из формул косинуса двойного аргумента, получаются формулы понижения степени.

$$1) \cos^2 x = (1 + \cos 2x) / 2$$

Квадрат косинуса равен, полу сумме единицы и косинуса двойного аргумента.

$$2) \sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$$

Квадрат синуса равен, полу разности единицы и косинуса двойного аргумента.

Запоминалка:

Для косинуса в формуле плюс. Для синуса минус.

$$3) \operatorname{tg}^2 x = (1 - \cos 2x)/(1 + \cos 2x)$$

Квадрат тангенса равен отношению, разности единицы и косинуса двойного аргумента, к сумме единицы и косинуса двойного аргумента.

$$4) \operatorname{ctg}^2 x = (1 + \cos 2x)/(1 - \cos 2x)$$

Квадрат котангенса равен отношению, суммы единицы и косинуса двойного аргумента, к разности единицы и косинуса двойного аргумента.

Запоминалка:

У тангенса разность в числителе. А сумма в знаменателе. А у котангенса наоборот.

11. Формулы суммы и разности углов, с разными аргументами.

Формулы суммы и разности углов, с разными аргументами, выводятся особым способом.

Можно вывести их по теореме косинусов.

Эти формулы очень громоздкие и правила для них будут большие. К ним лучше применять запоминалку.

1) Синус суммы и разности углов, с разными аргументами.

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

Синус суммы углов, с разными аргументами равен, сумме произведений синуса и косинуса, от разных аргументов.

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

Синус разности углов, с разными аргументами равен, разности произведений синуса и косинуса, от разных аргументов.

Запоминалка для синуса суммы и разности углов, с разными аргументами:

Функции в произведениях меняются, а знак не меняется.

Произведение начинаем записывать с синуса. И под ним ставим первый аргумент, из которого вычитается второй аргумент. А потом аргументы чередуем.

2) Косинус суммы и разности углов, с разными аргументами.

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Косинус суммы углов, с разными аргументами равен, разности произведений косинусов и синусов, от разных аргументов.

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Косинус разности углов, с разными аргументами равен, сумме произведений косинусов и синусов, от разных аргументов.

Запоминалка для косинуса суммы и разности углов, с разными аргументами:

Функции в произведениях не меняются, а знак меняется.

Произведение начинаем записывать с косинуса. И под ним ставим первый аргумент, из которого вычитается второй аргумент. Если их переставить местами ничего не изменится. Но для лучшего запоминания формул, аргументы лучше ставить по порядку.

12. Формулы суммы и разности функций, с разными аргументами.

1) Сумма и разность синусов, с разными аргументами.

$$\sin x + \sin y = 2 \sin((x + y)/2) \cos((x - y)/2)$$

Сумма синусов, с разными аргументами равна, удвоенному произведению синуса от полу суммы аргументов, на косинус от полу разности аргументов.

$$\sin x - \sin y = 2 \sin((x - y)/2) \cos((x + y)/2)$$

Разность синусов, с разными аргументами равна, удвоенному произведению синуса от полу разности аргументов, на косинус от полу суммы аргументов.

Запоминалка:

Если складываем или вычитаем синусы, то функции в удвоенном произведении меняются.

И под синусом сумма, если сумма синусов.

И под синусом разность, если разность синусов.

2) Сумма и разность косинусов, с разными аргументами.

$$\cos x + \cos y = 2 \cos((x + y)/2) \cos((x - y)/2)$$

Сумма косинусов, с разными аргументами равна, удвоенному произведению косинусов, от полу суммы и от полу разности, аргументов.

$$\cos x - \cos y = -2 \sin((x + y)/2) \sin((x - y)/2)$$

Разность косинусов, с разными аргументами равна, минус удвоенному произведению синусов, от полу суммы и от полу разности, аргументов.

Запоминалка:

Если складываем или вычитаем косинусы, то функции в удвоенном произведении не меняются.

И если сумма, то это косинусы; если разность, то это синусы.

13. Формулы произведения функции, с разными аргументами.

1) Произведение синусов, с разными аргументами.

$$\sin x \sin y = 1/2 (\cos (x - y) - \cos (x + y))$$

Произведение синусов, с разными аргументами равно, полу разности косинусов, от разности и от суммы аргументов.

$$\cos x \cos y = 1/2 ((\cos (x - y) + \cos (x + y)))$$

Произведение косинусов, с разными аргументами равно, полу сумме косинусов, от разности и от суммы аргументов.

2) Произведение синуса и косинуса, с разными аргументами.

$$\sin x \cos y = 1/2 (\sin(x - y) + \sin(x + y))$$

$$\cos x \sin y = 1/2 ((\sin(y + x) - \sin(y - x)))$$

Произведение синуса и косинуса, с разными аргументами равно, полу сумме синусов, от разности и от суммы аргументов.

Произведение косинуса и синуса, с разными аргументами равно, полу разности синусов, от суммы и от разности аргументов.

Запоминалка:

1) Если произведение одинаковых функций, то складываются или вычитаются косинусы.

Если перемножаются синусы, то косинусы вычитаются.

Если перемножаются косинусы, то косинусы складываются.

2) Если произведение разных функций, то вычитаются или складываются синусы.

Если синус стоит на первом месте, то синусы складываются.

Из первого аргумента, который стоит под синусом; вычитается второй аргумент, который стоит под косинусом.

Если синус стоит на втором месте, то синусы вычитаются.

Из второго аргумента, который стоит под синусом; вычитается первый аргумент, который стоит под косинусом. И разность находится под синусом, перед которым стоит минус.

14. Тангенс и котангенс, суммы и разности углов, с разными аргументами.

1)) Тангенс суммы и разности углов, с разными аргументами. И котангенс суммы и разности углов, с разными аргументами; через тангенс.

$$1) \operatorname{tg}(x + y) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) / (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y)$$

Тангенс суммы углов с разными аргументами равен, отношению суммы тангенсов с разными аргументами, к разности единицы и произведения тангенсов с разными аргументами.

$$2) \operatorname{tg}(x - y) = (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y) / (1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y)$$

Тангенс разности углов с разными аргументами равен, отношению разности тангенсов с разными аргументами, к сумме единицы и произведения тангенсов с разными аргументами.

Запоминалка:

Если сумма аргументов, то в числителе сумма тангенсов, а в знаменателе разность.

Если разность аргументов, то в числителе разность тангенсов, а в знаменателе сумма.

$$3) \operatorname{ctg}(x + y) = (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y) / (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)$$

Котангенс суммы углов с разными аргументами равен, отношению разности единицы и произведения тангенсов с разными аргументами, к сумме тангенсов с разными аргументами.

$$4) \operatorname{ctg}(x - y) = (1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y) / (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y)$$

Котангенс разности углов с разными аргументами равен, отношению суммы единицы и произведения тангенсов с разными аргументами, к разности тангенсов с разными аргументами.

Запоминалка:

Котангенс обратная функция для тангенса.

Если сумма аргументов, то в знаменателе сумма тангенсов.

Если разность аргументов, то в знаменателе разность тангенсов.

2)) Тангенс и котангенс суммы и разности углов с разными аргументами, через котангенс.

$$1) \operatorname{tg}(x + y) = (\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y) / (\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - 1)$$

Тангенс суммы углов с разными аргументами равен, отношению суммы котангенсов с разными аргументами, к разности произведения котангенсов с разными аргументами и единицы.

$$2) \operatorname{tg}(x - y) = (\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} x) / (\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y + 1)$$

Тангенс разности углов с разными аргументами равен, отношению разности котангенсов с разными аргументами (котангенс от второго аргумента, минус котангенс от первого аргумента), к сумме произведения котангенсов с разными аргументами и единицы.

Запоминалка

Если сумма аргументов, то в числителе сумма котангенсов.

Если разность аргументов, то в числителе разность котангенсов.

Из котангенса второго аргумента, вычитаем котангенс первого аргумента.

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «Литрес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на Литрес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.