



Интегралы

Василиса Волконская

Базовый курс для начинающих

Начинающих



Описание первого раздела. В данном разделе рассматриваются основы теории интегралов. Включены главы о неопределенном и определенном интегралах, а также о дифференцировании. Этот раздел является фундаментом для дальнейшего изучения математики.

Второй раздел посвящен более сложным темам, таким как двойные и тройные интегралы. Здесь рассматриваются методы вычисления площадей и объемов тел. Этот раздел требует более глубокого понимания математических принципов.

Третий раздел посвящен приложениям интегралов в физике и инженерии. Рассматриваются задачи на вычисление центра масс, моментов инерции и других физических величин. Этот раздел показывает практическую ценность интегрального исчисления.



Четвертый раздел посвящен решению задач на нахождение экстремумов функций. Рассматриваются методы нахождения максимумов и минимумов функций, а также их приложения в экономике и других областях.

Пятый раздел посвящен решению задач на нахождение длины дуги, площади поверхности и объема тела. Рассматриваются методы вычисления этих величин для различных геометрических тел.

Шестой раздел посвящен решению задач на нахождение центра масс и моментов инерции. Рассматриваются методы вычисления этих величин для различных тел и систем масс.

Василиса Волконская

**Интегралы. Базовый
курс для начинающих.**

«Автор»

2026

Волконская В.

Интегралы. Базовый курс для начинающих. / В. Волконская —
«Автор», 2026

В серии этих книг собрано много методик по решению и школьной математики и высшей математики. В книгах подробно разобраны различные примеры, для сдачи экзаменов и в школе и в университете. Собраны многие правила и методики решения задач. Материал написан доступно для любого среднего ученика, который хочет понять математику, а не бездумно ее списать.

© Волконская В., 2026

© Автор, 2026

Василиса Волконская

Интегралы. Базовый курс для начинающих.

Содержание:

1. Первообразная.
2. Неопределённый интеграл.
3. Таблица первообразных неопределённых интегралов.
4. Различные методы решения неопределённых интегралов.
5. Неопределённый интеграл, как выглядит графически.
6. Примеры решения интегралов на степенную формулу.
7. Решение простых интегралов на использование основных свойств.
8. Решение интегралов на формулы, с простыми функциями.
9. Решение интегралов на основные свойства.
10. Интегрирование по частям.
11. Решение интегралов на формулы с функциями по сложнее.
12. Решение интегралов по формуле интегрирования по частям, с более сложными функциями.
- 13) Интегрирование дробно рациональных функций.

Интегралы. Базовый курс для начинающих.

1. Первообразная.

Подготовка к определению первообразной.

В нашем мире всё движется и изменяется.

Рассмотрим движение материальной точки.

Материальная точка это любое тело, которое движется.

Когда материальная точка движется, то она проходит какой-то путь S .

Во время движения материальной точки проходит какое-то время t .

Движение материальной точки за какое-то время - это функциональная зависимость (функция).

Где t (время) будет независимой переменной. А $S(t)$ (путь отходящий точкой за определённое время) будет зависимой переменной. Путь от времени $S(t)$ - зависимая переменная.

Функциональную зависимость можно задать графически, на плоскости.

На горизонтальной оси, мы изображаем независимые переменные (это будет время).

На вертикальной оси, мы изображаем зависимые переменные (это будет путь).



$S(t)$ Зависимая переменная, ордината, значение функции.

t Независимая переменная, абсцисса, аргумент.

Начало координат, начало отсчёта (где $t = 0$ $S = 0$)

Точка пересечения осей будет началом отсчёта. Где путь и время изменения, имеют нулевое значение.

Функция $S(t)$ задаёт закон движения материальной точки.

Материальная точка может двигаться неравномерно. Может ускоряться, замедляться и так далее.

Поэтому рассматривается такое понятие, как средняя скорость материальной точки.

Средняя скорость материальной точки выражается формулой:

$$v_{\text{cp}} = (S(t + \Delta t) - S(t)) / \Delta t$$

Если промежутки времени Δt всё время уменьшать, то получится более точная средняя скорость.

Если ($\Delta t \rightarrow 0$) Δt стремится к нулю, то средняя скорость становится мгновенной.

Значит мгновенная скорость точки в момент времени t - это предел, к которому стремится средняя скорость при $\Delta t \rightarrow 0$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (S(t + \Delta t) - S(t)) / \Delta t$$

Мгновенную скорость называют производной функции $S(t)$.

$$v(t) = S'(t) \text{ или } v(t) = \dot{S}(t)$$

В физике встречаются обратные задачи.

Например, по заданной скорости найти закон движения материальной точки.

$$v(t) = S'(t)$$

В этой задаче требуется найти такую функцию $S(t)$ производная которой равна $v(t)$

Не обязательно рассматривать закон движения материальной точки, можно рассматривать и другие различные законы.

В этом случае t обозначаем за x , а S обозначаем за f .

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x + \Delta x) - f(x)) / \Delta x$$

Если нужно найти по производной саму функцию, то нужно выполнить обратное действие. В этом случае функция, которую мы находим, называется первообразной.

Обозначается она: $F(x)$

Первообразная необходима для того, чтобы возвращаться от производной к первоначальной функции.

Определение:

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, на некотором интервале; если для всех x из этого интервала выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$

Для удобства нахождения первообразной функции, рассмотрим такое понятие, как неопределённый интеграл.

2. Неопределённый интеграл.

Интеграл называется неопределённым, если у него нет границ интегрирования.

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$\int$ знак интеграла.

$f(x)$ функция.

dx дифференциал по x .

$F(x)$ первообразная.

C константа (любое число).

Свойства интегралов.

1) Число, стоящее под знаком интеграла, можно вынести за знак интеграла или внести под дифференциал.

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx = \int f(x) d cx$$

2) Интеграл можно умножить и поделить, на одно и то же число.

$$c \int f(x) dx / c = 1/c \int f(x) dx$$

c любое число (константа).

3) Интеграл суммы, равен сумме интегралов.

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

4) Интеграл разности, равен разности интегралов.

$$\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

5) Если функция вносится под дифференциал, то находится её первообразная.

$$\int f(x) dx = \int d F(x)$$

6) Если функция выносится из-под дифференциала, то находится её производная.

$$\int d f(x) = \int f'(x) dx$$

7) Так как при нахождении производной от числа получается 0, то при нахождении неопределённого интеграла, к первообразной прибавляется любое число, которое обозначается буквой C .

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

C число (константа).

8) Под дифференциалом к первообразной можно прибавлять число. При этом ничего не изменится.

$$\int f(x) dx = \int f(x) d(x + c)$$

3. Таблица первообразных неопределённых интегралов (звездочка это x).

$$1) \int c dx = Cx + C_1$$

$$2) \int 1 dx = x + C$$

$$3) \int x^n dx = x^{n+1} / (n + 1) + C; n \neq -1$$

- 4) $\int \sqrt{x} = (2/3) \sqrt{x^3}$
- 5) $\int (1/x) dx = \int dx / x = \ln |x| + C$
- 6) $\int e^x dx = e^x + C$
- 7) $\int \cos x dx = \sin x + C$
- 8) $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- 9) $\int dx / \cos^2 x = \operatorname{tg} x + C$
- 10) $\int dx / \sin^2 x = -\operatorname{ctg} x + C$
- 11) $\int a^x dx = (a^x / \ln a) + C$
- 12) $\int dx / (1 + x^2) = \operatorname{arctg} x + C$
- 13) $\int dx / \sqrt{1 - x^2} = \arcsin x + C$
- 14) $\int dx / (x \ln \beta) = \log_{\beta} x + C$
- 15) $\int dx / \sqrt{x} = 2\sqrt{x} + C$
- 16) $\int dx / \sqrt{(x^2 \pm a^2)} = \ln|x + \sqrt{(x^2 \pm a^2)}| + C$
- 17) $\int dx / (x^2 - a^2) = (1/2a) \ln |(x - a)/(x + a)| + C$
- 18) $\int dx / (a^2 - x^2) = (1/2a) \ln |(x + a)/(x - a)| + C$
- 19) $\int dx / x^2 = -1/x + C$
- 20) $\int dx / (a^2 + x^2) = (1/a) \operatorname{arctg} (x/a) + C = - (1/a) \operatorname{arcctg} (x/a) + C$
- 21) $\int dx / \sqrt{(a^2 - x^2)} = \arcsin (x/a) + C = -\arccos (x/a) + C$
- 22) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
- 23) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
- 24) $\int dx / \operatorname{ch}^2 x = \operatorname{th} x + C$
- 25) $\int dx / \operatorname{sh}^2 x = -\operatorname{cth} x + C$

4. Различные методы решения неопределённых интегралов.

1)) Решение интегралов на формулу:

$$\int x^n = x^{n+1} / (n + 1) + C$$

Для степенной функции (при решении интегралов на эту формулу) будем пользоваться правилами интегрирования или свойствами интегралов.

Правила интегрирования получаются из правил дифференцирования.

Дифференцирование - это нахождение производной для заданной функции.

Интегрирование - это нахождение первообразной для заданной функции.

Интегрирование и дифференцирование - это обратные операции друг для друга.

2)) Решение простых интегралов на использование свойств, и применение степенной формулы.

1) Число, стоящее под интегралом, можно вынести за знак интеграла или внести под знак дифференциала.

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx = \int f(x) d(cx)$$

2) Интеграл можно умножить и поделить на одно и то же число.

$$\int c f(x) d(x/c) = 1/c \int f(x) d cx = \int f(x)/c d cx = \int c f(x) d(x/c)$$

3) Под дифференциалом к переменной можно прибавлять число. При этом ничего не изменится.

$$\int f(x) dx = \int f(x) d(x + c)$$

Так как, если функция выносится из-под дифференциала, то находится её производная. А производная числа равна нулю.

Пример один.

$$\int x^2 dx =$$

Это табличный интеграл. Находим его по формуле.

$$= x^{2+1} / (2 + 1) + C = x^3 / 3 + C$$

Ответ: $x^3 / 3 + C$

Пример два.

$$\int 1/x^3 dx =$$

Преобразуем функцию, стоящую под интегралом. Перевернём дробь, и степень станет отрицательной.

$$\int x^{-3} dx =$$

Это табличный интеграл. Находим его по формуле.

$$= x^{-3+1}/(-3+1) + C = x^{-2}/(-2) + C$$

Перевернём дробь, и степень станет положительной.

$$= ((-1/2) 1/x^2) + C = -1/(2x^2) + C$$

$$\text{Ответ: } -1/(2x^2) + C$$

Пример три.

$$\int \sqrt{x} dx =$$

Преобразуем функцию, стоящую под интегралом. Заменим корень дробной степенью.

$$= x^{1/2} dx =$$

Это табличный интеграл. Найдём его по формуле.

$$= x^{1/2+1}/(1/2+1) + C = x^{3/2}/(3/2) + C =$$

Заменим дробную степень корнем.

$$= 2\sqrt{x^3}/3 + C = 2x\sqrt{x}/3 + C$$

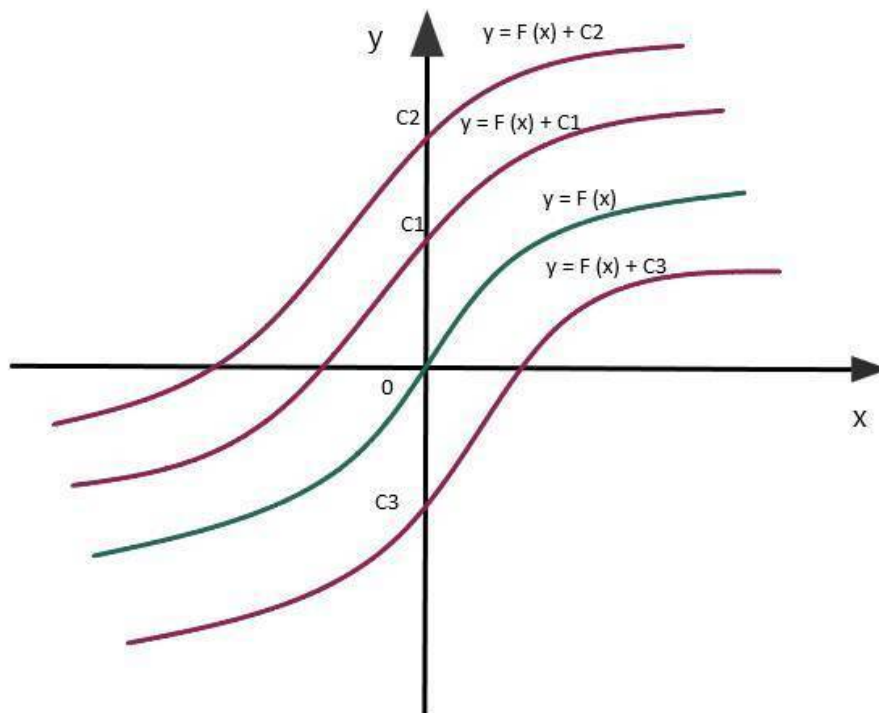
$$\text{Ответ: } 2x\sqrt{x}/3 + C$$

5. Неопределенный интеграл, как выглядит графически.

При нахождении неопределённого интеграла, к первообразной всегда прибавляется любое число.

Так как производная числа равна нулю, то при нахождении первообразной, это число всё время появляется.

Какое было первоначальное число, неизвестно? Получается, что мы находим целую группу первообразных (их бесконечно много).



$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Эти первообразные отличаются только числом, которое прибавляется. Следовательно, графики функций $y = F(x) + C$ получаются из графика функции $y = F(x)$ путём сдвига вдоль оси y .

Выбором постоянной C можно добиться того, чтобы график первообразной проходил через заданную точку.

6. Примеры решения интегралов на степенную формулу.

Пример четыре.

$$\int x^3 dx =$$

Это табличный интеграл. Найдём его по формуле.

$$= x^{3+1} / (3 + 1) + C = x^4 / 4 + C$$

Ответ: $x^4 / 4 + C$

Пример пять.

$$\int \sqrt[3]{x} dx =$$

Преобразуем функцию под интегралом. Корень заменим дробной степенью.

$$= \int x^{1/3} dx =$$

Это табличный интеграл. Найдём его по формуле.

$$= x^{1/3+1} / (1/3 + 1) + C = x^{4/3} / (4/3) + C = (3/4) x^{4/3} + C =$$

Заменим дробную степень корнем.

$$= (3/4) \sqrt[3]{x^4} + C = (3/4) x \sqrt[3]{x} + C$$

Ответ: $(3/4) x \sqrt[3]{x} + C$

Пример шесть.

$$\int (1/\sqrt{x}) dx =$$

Преобразуем функцию под интегралом. Перевернём дробь, и степень станет отрицательная. Корень представим в виде дробной степени.

$$= \int x^{-1/2} dx =$$

Это табличный интеграл. Найдём его по формуле.

$$= x^{-1/2+1}/(-1/2+1) + C = x^{1/2}/(1/2) + C =$$

Заменим дробную степень корнем. И перевернем нижнюю дробь.

$$= 2\sqrt{x} + C$$

Ответ: $2\sqrt{x} + C$

Пример семь.

$$\int (1/x^2) dx =$$

Преобразуем функцию, стоящую под интегралом. Перевернём дробь, и степень станет отрицательной.

$$= \int x^{-2} dx =$$

Это табличный интеграл. Найдём его по формуле.

$$= \int x^{-2+1}/(-2+1) + C = x^{-1}/(-1) + C =$$

Перевернём дробь, и степень станет положительной. Минус вынесем вперёд.

$$= -1/x + C$$

Ответ: $-1/x + C$

Пример восемь.

$$\int dx / \sqrt[3]{x} = \int (1/\sqrt[3]{x}) dx =$$

Преобразуем функцию, стоящую под интегралом.

Перевернём дробь, и степень станет отрицательной. Корень заменим дробной степенью.

$$= \int x^{-1/3} dx =$$

Это табличный интеграл. Найдём его по формуле.

$$= \int x^{-1/3+1}/(-1/3+1) + C = x^{2/3}/(2/3) + C =$$

Заменим дробную степень на корень и трёхэтажную дробь заменим на двухэтажную.

Перевернём нижнюю дробь.

$$(3/2)\sqrt[3]{x^2} + C$$

Ответ: $(3/2)\sqrt[3]{x^2} + C$

Дифференциал умножается на функцию под интегралом, поэтому его можно записывать около функции (дроби) или ставить его в числителе дроби.

$$\int dx / f(x) = \int (1/f(x)) dx$$

Пример девять.

$$\int dx / \sqrt{x^3} = \int (1/\sqrt{x^3}) dx =$$

Перевернём дробь, и степень станет отрицательной. Корень заменим дробной степенью.

$$= \int x^{-3/2} dx =$$

Это табличный интеграл. Найдём его по формуле.

$$= x^{-3/2+1}/(-3/2+1) + C = x^{-1/2}/(-1/2) + C$$

Перевернём дробь и заменим дробную степень корнем.

$$= -2/\sqrt{x} + C$$

Ответ: $-2/\sqrt{x} + C$

Пример десять.

$$\int 2x^4 dx =$$

Число можно вынести за знак интеграла.

$$2 \int x^4 dx = 2 x^5 / 5 + C = (2/5) x^5 + C$$

Ответ: $(2/5) x^5 + C$

Пример одиннадцать.

$$\int \sqrt{2x} dx =$$

Аргументы под функцией и под дифференциалом разные. Для того чтобы сделать аргументы одинаковыми, умножим и поделим интеграл на одно и то же число (на 2)

$$= 1/2 \int \sqrt{2x} \, d 2x =$$

Теперь аргументы одинаковые можно применять формулу.

$$= 1/2 \times 2/3 \sqrt{2x}^3 + C = 1/3 \sqrt{(8x^3)} + C = 2/3 \sqrt{(2x^3)} + C$$

$$\text{Ответ: } 2/3 \sqrt{(2x^3)} + C$$

Пример двенадцать.

$$\int (x + 1)^3 \, dx =$$

Аргументы под функцией и под дифференциалом разные, поэтому пока формулу применять нельзя.

Для того чтобы они стали одинаковыми, к переменной под дифференциалом прибавим число один. Так как при этом ничего не изменится. Если вынести из-под дифференциала единицу, то получится ноль. Производная числа равна нулю.

$$= \int (x + 1)^3 \, d(x + 1) =$$

Аргументы одинаковые. Применяем формулу.

$$= (x + 1)^{3+1}/(3 + 1) + C = (x + 1)^4/4 + C$$

$$\text{Ответ: } (x + 1)^4/4 + C$$

Пример тринадцать.

$$\int \sqrt{x + 5} \, dx =$$

Аргументы под функцией и под дифференциалом разные.

Прибавляем пятёрку к переменной под дифференциалом. При этом ничего не изменится.

$$= \int \sqrt{x + 5} \, d(x + 5) =$$

Аргументы одинаковые. Можно применять формулу из таблицы первообразных.

$$= 2/3 \sqrt{x + 5}^3 + C$$

$$\text{Ответ: } 2/3 \sqrt{x + 5}^3 + C$$

Пример четырнадцать.

$$\int dx / \sqrt{3 - x} = \int (1 / \sqrt{3 - x}) \, dx =$$

Перевернём дробь. Степень станет отрицательной. Корень заменим дробной степенью.

$$= \int (3 - x)^{-1/2} \, dx =$$

Аргументы под функцией и под дифференциалом разные. Для того чтобы они стали одинаковыми, умножим и поделим интеграл на минус единицу и под дифференциалом прибавим три. При этом ничего не изменится.

$$= - \int (3 - x)^{-1/2} \, d(-x + 3) = - \int (3 - x)^{-1/2} \, d(3 - x) =$$

Аргументы одинаковые можно применять формулу.

$$= - (3 - x)^{-1/2+1}/(-1/2 + 1) + C = - (3 - x)^{1/2}/(1/2) + C =$$

Заменим дробную степень корнем и перевернём дробь в знаменателе.

$$= - 2 \sqrt{3 - x} + C$$

$$\text{Ответ: } - 2 \sqrt{3 - x} + C$$

Пример пятнадцать.

$$\int (3 - 4x)^5 \, dx =$$

Аргументы под функцией и под дифференциалом разные. Умножим и поделим интеграл на минус четыре и прибавим под дифференциалом тройку.

$$= - 1/4 \int (3 - 4x)^5 \, d(-4x + 3) = - 1/4 \int (3 - 4x)^5 \, d(3 - 4x) =$$

Аргументы одинаковые. Можно применять формулу.

$$= - 1/4 (3 - 4x)^{5+1}/(5 + 1) + C = - 1/4 (3 - 4x)^6/6 + C = - 1/4 (3 - 4x)^6/24 + C$$

$$\text{Ответ: } - 1/4 (3 - 4x)^6/24 + C$$

Пример шестнадцать.

$$\int (5x + 7)^8 \, dx =$$

Аргументы под интегралом и под дифференциалом разные. Умножим и поделим интеграл на 5 и прибавим к переменной под дифференциалом 7.

$$= 1/5 \int (5x + 7)^8 d(5x + 7) =$$

Аргументы одинаковые. Применяем формулу.

$$= 1/5 (5x + 7)^{8+1} / (8 + 1) + C = 1/5 (5x + 7)^9 / 9 + C = (5x + 7)^9 / 45 + C$$

$$\text{Ответ: } (5x + 7)^9 / 45 + C$$

Пример семнадцать.

$$\int (4 - x/2)^7 dx =$$

Аргументы под интегралом и под дифференциалом разные. Умножим и поделим интеграл на -2 и прибавим к переменной под дифференциалом 4.

$$= -2 \int (4 - x/2)^7 d(-x/2 + 4) = -2 \int (4 - x/2)^7 d(4 - x/2) =$$

Аргументы одинаковые. Можно применять формулу.

$$= -2 (4 - x/2)^{7+1} / (7 + 1) + C = -2 (4 - x/2)^8 / 8 + C = -(4 - x/2)^8 / 4 + C$$

$$\text{Ответ: } -(4 - x/2)^8 / 4 + C$$

7. Решение простых интегралов на использование свойств:

1) Интеграл суммы равен сумме интегралов.

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

2) Интеграл разности равен разности интегралов.

$$\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

Пример один.

$$\int (3x^2 + 5x) dx =$$

Интеграл суммы равен сумме интегралов.

$$\int 3x^2 dx + \int 5x dx =$$

Вынесем числа за знаки интеграла.

$$= 3 \int x^2 dx + 5 \int x dx = 3x^3 / 3 + 5x^2 / 2 + C = x^3 + (5/2)x^2 + C$$

$$\text{Ответ: } x^3 + (5/2)x^2 + C$$

К сумме или разности функций, любое число прибавляется один раз.

Пример два.

$$\int (\sqrt{x} - x^2/2) dx =$$

Интеграл разности равен разности интегралов.

$$= \int \sqrt{x} dx - 1/2 \int x^2 dx = (2/3) \sqrt{x^3} - 1/2 (x^3 / 3) + C = (2/3) \sqrt{x^3} - x^3 / 6 + C$$

$$\text{Ответ: } (2/3) \sqrt{x^3} - x^3 / 6 + C$$

Пример три.

$$\int (4x^3 + 5\sqrt[3]{x}) dx =$$

Интеграл суммы равен сумме интегралов.

$$\int 4x^3 dx + 5 \int \sqrt[3]{x} dx =$$

Вынесем числа за знак интеграла и корень запишем в виде дробной степени.

$$= 4 \int x^3 dx + 5 \int x^{1/3} dx =$$

Это табличные интегралы. Найдём их по формуле.

$$4x^{3+1} / (3 + 1) + 5x^{1/3+1} / (1/3 + 1) + C = 4x^4 / 4 + 5x^{4/3} / 4/3 + C =$$

Сократим дробь и перевернём нижнюю дробь.

$$= x^4 + (15/4)\sqrt[3]{x^4} + C$$

$$\text{Ответ: } x^4 + (15/4)\sqrt[3]{x^4} + C$$

Пример четыре.

$$\int (5x^4 - 2x) dx =$$

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «Литрес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на Литрес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.