

Василиса Волконская

Простые
показательные и
логосифмические
уравнения и
неравенства

Василиса Волконская
Простые показательные
и логарифмические
уравнения и неравенства

*<https://litres.ru/74251008>
SelfPub; 2026*

Аннотация

В серии этих книг собрано много методик по решению и школьной математики и высшей математики. В книгах подробно разобраны различные примеры, для сдачи экзаменов и в школе и в университете. Собраны многие правила и методики решения задач. Материал написан доступно для любого среднего ученика, который хочет понять математику, а не бездумно ее списать.

Василиса Волконская

Простые показательные и логарифмические уравнения и неравенства

Содержание:

- 1) Показательная функция. Построение ее графика, алгоритм.
- 2) Область определения и область значений показательной функции.
- 3) Определение логарифма.
- 4) Свойства логарифмов.
- 5) Примеры на отработку свойств логарифмов.
- 6) Алгоритм определения знака логарифма.
- 7) Примеры на свойства логарифмов.
- 8) Логарифмическая функция.
- 9) Область определения и область значений логарифмической функции.
- 10) Область допустимых значений (ОДЗ).
- 11) Примеры построения графиков показательной и логарифмической функции.
- 12) Свойства степеней.

- 13) Алгоритм решения простых показательных уравнений, приводимых к одинаковым основаниям.
- 14) Примеры решения простых показательных уравнений, приводимых к одинаковым основаниям.
- 15) Простые показательные уравнения, не приводимые к одинаковому основанию.
- 16) Примеры решения простых показательных уравнений, не приводимых к одинаковому основанию.
- 17) Простые логарифмические уравнения, алгоритм.
- 18) Обратные свойства для свойств логарифмов.
- 19) Примеры решения простых логарифмических уравнений.
- 20) Рациональные неравенства. Метод интервалов.
- 21) Решение простых показательных неравенств, алгоритм.
- 22) Примеры решения простых показательных неравенств, приводимых к одинаковому основанию.
- 23) Алгоритм решения показательных неравенств, не приводимых к одинаковому основанию, с примерами.
- 24) Простые логарифмические неравенства, алгоритм.
- 25) Примеры решения простых логарифмических неравенств.

Решение простых показательных и логарифмических уравнений. (Звездочка это x)

- 1)) Показательная функция. Построение ее графика, ал-

горитм.

Показательная функция может возрастать или может убывать. То есть она монотонна.

Построение графика показательной функции, алгоритм.

Для того чтобы построить график показательной функции, нужно:

$$y = a^x$$

1) Построить таблицу.

x	-2	-1	0	1	2
y	$(1/a)^2$	$1/a$	1	a	a^2

2) Нанести точки на числовую плоскость.

3) Соединить эти точки плавной кривой линией.

Функция называется показательной, так как в ней переменная величина - это показатель степени.

Показатель степени
(независимая переменная)

$$y = a^x$$

Основание (это постоянное число)

Значение функции
(зависимая переменная)

В зависимости от основания, функция может возрастать или убывать.

Если $a > 1$, то функция возрастает.

Если $0 < a < 1$, то функция убывает.

Основание функции всегда положительное число, неравное единице.

Если $a = 1$, то показательная функция станет линейной.

Пример один.

$$y = 2^x$$

1) Построим таблицу.

$$y(-2) = 2^{-2} = (1/2)^2 = 1/4$$

$$y(-1) = 2^{-1} = 1/2$$

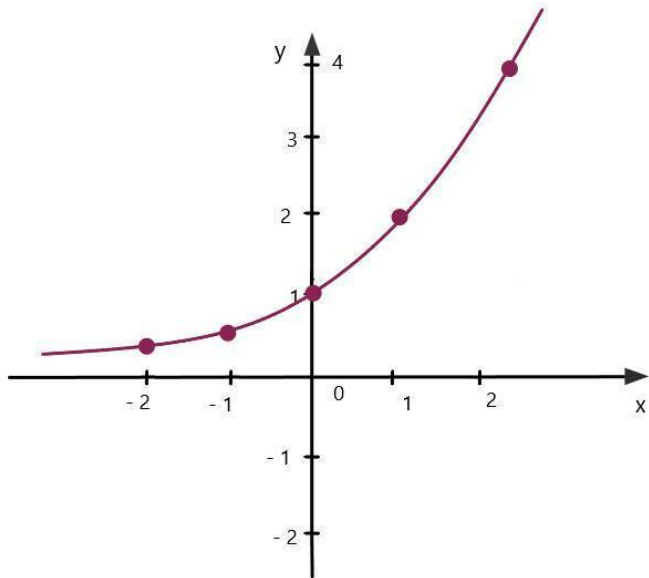
$$y(0) = 2^0 = 1$$

$$y(1) = 2^1 = 2$$

$$y = 2^2 = 4$$

x	-2	-1	0	1	2
y	1/4	1/2	1	2	4

- 2) Нанесём точки на числовую плоскость по таблице.
- 3) Проведём плавную кривую линию через точки.



Пример два.

$$y = (1/2)^x$$

1) Построим таблицу.

$$y(-2) = (1/2)^{-2} = 2^2 = 4$$

$$y(-1) = (1/2)^{-1} = 2$$

$$y(0) = (1/2)^0 = 1$$

$$y(1) = (1/2)^1 = 1/2$$

$$y(2) = (1/2)^2 = 1/4$$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$1/2$	$1/4$

- 2) Нанесём точки на числовую плоскость по таблице.
- 3) Проведём плавную кривую линию через точки.

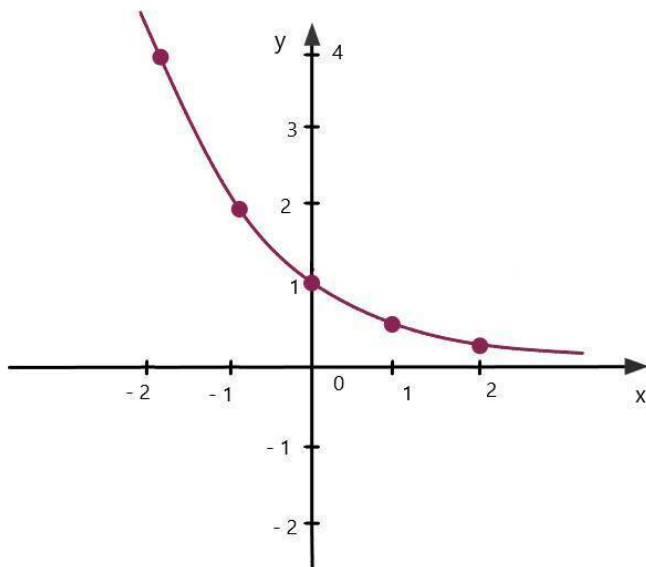


График функции бесконечно близко приближается к оси x , но никогда её не пересекает.

Значит, ось x является горизонтальной асимптотой.

Обозначается она пунктирной линией.

Асимптота - это прямая линия, к которой график функции приближается, но никогда её не пересекает.

2)) Область определения и область значений показательной функции.

$D(f)$: область определения.

$D(f)$: $x \in (-\infty; +\infty)$

Областью определения функции, является вся числовая прямая x .

Из этого следует, что независимая переменная x , может быть любым числом.

$E(f)$: область значений функции

$E(f)$: $y \in (0; +\infty)$

Область значений функции - это положительная часть числовой прямой y .

Из этого следует, что зависимая переменная y , может быть только положительным числом.

Это получается из свойств степеней.

В какую бы степень мы не возводили положительное число, всегда получается положительное число.

Если $a > 0 \Rightarrow a^* > 0$

Если степень x положительная и больше единицы, то чис-

ло увеличивается.

Если степень x положительная и меньше единицы, то число уменьшается.

Но число остаётся всегда положительным.

$$a^* = a * (a^{1'} = \sqrt[n]{a})$$

Если степень x равна нулю, то число в степени ноль равно единице.

$$a^0 = 1$$

Если степень отрицательная, то чтобы она стала положительной, мы переворачиваем дробь.

При этом число в степени может увеличиваться или уменьшаться, но отрицательным стать не может.

3)) Определение логарифма.

Логарифмом положительного числа b по основанию a , где основание (a) положительное число, неравное единице; называется показатель степени, в которую надо возвести основание (a), чтобы получилось число b .

Логарифм положительного числа b , по основанию a .

$$\log_a b = b$$

Основание степени и
основание логарифма.

Число b , (положительное число)
подлогарифмическое выражение.

Это равенство называется основным логарифмическим тождеством.

Логарифмы применяются при решении простых показательных уравнений, не приводимых к одинаковым основаниям.

Пример.

$$2^x = 5$$

Обе части уравнения привести к одинаковым основаниям не получится.

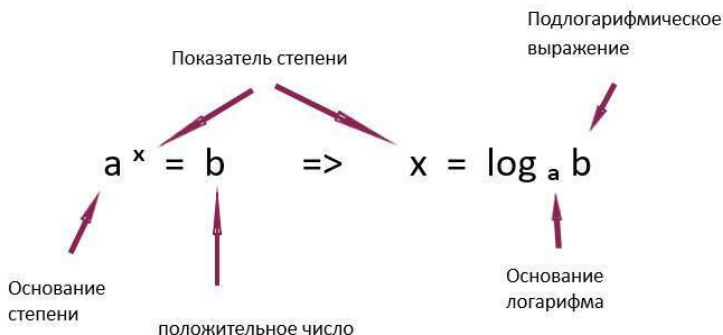
Значит, это уравнение нужно решать по определению логарифма.

$$x = \log_2 5$$

Ответ: $\log_2 5$

Эта математическая операция, называется логарифмиро-

ванием (переход от показательного выражения к логарифмическому выражению).



При переходе от показательного выражения к логарифмическому выражению, основание степени становится основанием логарифма.

Так как логарифмирование - это обратное действие для действия возведения в степень, то у логарифмов тоже есть свойства (обратные для свойств степеней).

Логарифмы можно складывать, вычитать, перемножать, делить и возводить в степень их элементы (основание и подлогарифмическое выражение).

4)) Свойства логарифмов.

1. Логарифм по любому основанию от единицы, равен ну-

лю.

$$\log_a 1 = 0$$

2. Логарифм с одинаковыми, основанием и подлогарифмическим выражением, равен единице.

$$\log_a a = 1$$

3. Степень подлогарифмического выражения можно вынести за знак логарифма. Умножить логарифм на степень подлогарифмического выражения.

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$$

4. Логарифм с одинаковыми основанием и подлогарифмическим выражением в степени, равен этой степени.

$$\log_a a^\alpha = \alpha$$

5. Степень основания логарифма можно вынести за знак логарифма, как единица, делённая на неё.

Умножить логарифм на обратное число для степени основания логарифма.

$$\log_{a^\beta} b = 1/\beta \log_a b$$

6. Логарифм с одинаковыми подлогарифмическим выра-

жением и основанием степени, равен обратному числу для степени основания логарифма.

$$\log_{a^{\beta}} a = 1/\beta$$

7. Степени подлогарифмического выражения и основания можно вынести за знак логарифма, как частное степени подлогарифмического выражения и степени основания.

Умножить логарифм на дробь с числителем равным степени подлогарифмического выражения (α) и знаменателем равным степени основания (β).

$$\log_{a^{\beta}} b^{\alpha} = \alpha / \beta \log_a b$$

8. Минус, стоящий перед логарифмом можно внести под логарифм, в виде степени подлогарифмического выражения

или степени основания (минус единицы).

$$-\log_a b = \log_a b^{-1} = \log_a 1/b = \log_{a^{-1}} b = \log_{1/a} b$$

9. Сумма логарифмов с одинаковыми основаниями, равна логарифму с этим основанием, от произведения их подлогарифмических выражений.

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \times y)$$

Логарифм от произведения, равен сумме логарифмов с тем же основанием и подлогарифмическими выражениями равными множителям.

$$\log_a (x \times y) = \log_a x + \log_a y$$

10. Разность логарифмов с одинаковыми основаниями, равна логарифму с этим же основанием, от частного их подлогарифмических выражений.

$$\log_a x - \log_a y = \log_a (x / y)$$

Логарифм от частного, равен разности логарифмов с тем же основанием и подлогарифмическими выражениями, от этого частного.

$$\log_a x / y = \log_a x - \log_a y$$

11. Если в логарифме поменять местами основание и подлогарифмическое выражение, то логарифм опустится в знаменатель, если он был в числителе.

Или логарифм поднимется в числитель, если он был в знаменателе.

То есть при перестановке местами подлогарифмического выражения и основания, перевернётся дробь.

$$\log_a \beta = 1 / \log_\beta a$$

$$1 / \log_a \beta = \log_\beta a$$

12. Логарифм можно заменить частным логарифмов с любым основанием.

И в числителе подлогарифмическое выражение будет равно, подлогарифмическому выражению логарифма, который мы заменяем частным.

А в знаменателе подлогарифмическое выражение будет равно, основанию логарифма, который мы заменяем частным.

$$\log_a b = \log_\beta b / \log_\beta a$$

Частное логарифмов с одинаковыми основаниями, можно представить в виде логарифма с основанием равным подлогарифмическому выражению знаменателя, и подлогарифмическим выражением равным подлогарифмическому выражению числителя.

$$\log_\beta b / \log_\beta a = \log_a b$$

13. Основное логарифмическое тождество.

$$a^{\log_a b} = b$$

Если выражение возводится в степень логарифма, и основания степени и логарифма равны, то это выражение в степени равно подлогарифмическому выражению степени.

14. Если основания логарифмов равны, то подлогарифмические выражения равны. В равенстве логарифмов.

$$\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$$

15. Если под логарифмические выражения равны, то и основание логарифмов равны. В равенстве логарифмов.

$$\log_x a = \log_y a \Rightarrow x = y$$

16. Если перемножить логарифмы с поменянными местами основанием и подлогарифмическим выражением, то получится единица.

$$\log_a b \log_b a = 1$$

Это свойство следствие из 11 свойства.

5)) Примеры на отработку свойств логарифмов.
Свойство один.

$$\log_a 1 = 0$$

Пример один.
Вычислить.

$$\log_2 1 = 0$$

$$\log_{\sqrt{3}} 1 = 0$$

$$\log_{1/3} 1 = 0$$

$$\log_{2,5} 1 = 0$$

$$\log_{4/3} 1 = 0$$

Свойство два.

$$\log_a a = 1$$

Пример два.

$$\log_2 2 = 1$$

$$\log_{0,3} 0,3 = 1$$

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1$$

$$\log_{5/3} 5/3 = 1$$

Пример три.

$$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \log_2 2 = 4$$

Пример четыре.

$$\log_2 \sqrt{2} =$$

Корень - это дробная степень числа. Представим число под логарифмом в виде числа в дробной степени. Корень квадратный это степень 1/2.

$$= \log_2 2^{1/2} =$$

Вынесем степень 1/2 за знак логарифма. И логарифм заменим единицей.

$$= 1/2 \log_2 2 = 1/2$$

Ответ: 1/2

Пример пять.

$$\log_3 (1/\sqrt[4]{9}) =$$

Перевернём дробь, и степень числа станет отрицательной.

$$= \log_3 \sqrt[4]{9}^{-1} =$$

Представим число под корнем в виде числа в дробной степени.

Показатель степени [корня] - это знаменатель дроби.

А степень корня или подкоренное выражение - это числитель дроби.

$$= \log_3 9^{-1/4} =$$

Представим девять в виде степени тройки (три в квадрате).

$$= \log_3 (3^2)^{-1/4} =$$

Раскроем скобку, перемножив степени.

$$= \log_3 3^{-2/4} = \log_3 3^{-1/2} =$$

Вынесем степень за знак логарифма.

$$= -1/2 \log_3 3 =$$

Логарифм с одинаковыми основанием и подлогарифмическим выражением равен единице.

$$= -1/2$$

Ответ: - 1/2

Пример шесть.

$$\log_3 1/9 =$$

Представим девять в виде степени тройки.

$$= \log_3 1/3^2 =$$

Перевернём дробь, и степень поменяет знак.

$$= \log_3 3^{-2} =$$

Вынесем степень за знак логарифма.

$$= -2 \log_3 3 = -2$$

Ответ: - 2

Пример семь.

$$\log_{0,5} 0,125 =$$

Представим основание логарифма в виде степени основа-

ния.

$$= \log_{0,5} 0,5^3 =$$

Вынесем степень основания за знак логарифма. Умножим логарифм на неё.

$$= 3 \log_{0,5} 0,5 =$$

Логарифм с одинаковым основанием и подлогарифмическим выражением равен единице.

$$= 3 \times 1 = 3$$

Ответ: 3

Свойства пять и шесть.

Пример один.

$$\log_{1/2} 2 =$$

В основании логарифма перевернём дробь, и степень станет отрицательной.

$$= \log_{2^{-1}} 2 =$$

Вынесем степень основания за знак логарифма. Умножим логарифм на обратное число для степени.

$$= 1 / (-1) \log_2 2 =$$

Заменим логарифм единицей.

$$= -1$$

Ответ: - 1

Пример два.

$$\log_{\sqrt{3}} 3 =$$

Заменим корень на дробную степень $1/2$.

$$= \log_{3^{1/2}} 3 =$$

Вынесем степень основания за знак логарифма. Умножим логарифм на обратное число для степени.

$$= 1/(1/2) \log_3 3 =$$

Поделит числа (перевернём нижнюю дробь).

$$2 \log_3 3 =$$

Логарифм заменим единицей.

$$= 2 \times 1 = 2$$

Ответ: 2

Пример три.

$$\log_{1/\sqrt[3]{25}} 5 =$$

Заменим корень дробной степенью.

$$= \log_{1/25^{1/3}} 5 =$$

Перевернём дробь, и степень поменяет знак.

$$= \log_{25^{-1/3}} 5 =$$

Представим 25 в виде степени пятёрки.

$$= \log_5 5^{-2/3} =$$

Вынесем степень основания за знак логарифма. Умножим логарифм на обратное число.

$$= 1/(-2/3) \log_5 5 =$$

Перевернём нижнюю дробь и логарифм заменим единицей.

$$= -3/2 \times 1 = -3/2 = -1,5$$

Ответ: -1,5

Пример четыре.

$$\log_{625} 5 =$$

Заменим число в основании логарифма на число в степени с основанием пять.

$$= \log_5 5^4 =$$

Вынесем степени основания за знак логарифма. Умножим

логарифм на обратное число.

$$= 1/4 \log_5 5 =$$

Заменим логарифм единицей.

$$= 1/4 = 0,25$$

Ответ: 0,25

Седьмое свойство.

Пример один.

$$\log_{1/2} \sqrt[3]{2} =$$

Приведём логарифм к одинаковому основанию и подлогарифмическому выражению.

В основании перевернём дробь, а под логарифмом корень представим в виде дробной степени.

$$= \log_{2^{-1}} 2^{1/3} =$$

Вынесем степени основания и подлогарифмического выражения за логарифм. Умножим логарифм на их частное.

$$= 1/3 / (-1) \log_2 2 =$$

Заменим логарифм единицей и поделим числа перед логарифмом.

$$= -1/3 \times 1 = -1/3$$

Ответ: $-1/3$

Пример два.

$$\log_{1/16} 1/64 =$$

Приведём логарифм к одинаковому основанию и подлогарифмическому выражению.

$$= \log_{16^{-1}} 64^{-1} =$$

Перевернём дроби. И заменим числа степенями числа четыре.

$$= \log_4 4^{-2} 4^{-3} =$$

Вынесем степени основания и подлогарифмического выражения за знак логарифма. Умножим логарифм на их частное.

$$= -3/(-2) \log_4 4 =$$

Заменим логарифм единицей.

$$= 3/2 = 1,5$$

Ответ: 1,5

Пример три.

$$\log_{49} 1/\sqrt{7} =$$

Приведём логарифм к одинаковому основанию и подлогарифмическому выражению.

$$= \log_7 7^{-1/2} =$$

Вынесем степени основания и подлогарифмического выражения за знак логарифма. Умножим логарифм на их част-

ное.

$$= (-1/2) / 2 \log_7 7 =$$

Заменим логарифм единицей и поделим числа.

$$= -1/4 = -0,25$$

Ответ: -0,25

Свойство восемь.

Пример один.

$$\log_6 1/6 = \log_6 6^{-1} = -1 \log_6 6 = -1$$

Ответ: -1

Пример два.

$$\log_{1/\sqrt{5}} \sqrt{5} =$$

Перевернём дробь в основании логарифма. И вынесем степень основания за логарифм.

$$\log_{\sqrt{5}^{-1}} \sqrt{5} = -1 \log_{\sqrt{5}} \sqrt{5} =$$

Ответ: -1

Пример три.

Определить знак числа.

$$\log_4 1/3 = \log_4 3^{-1} = -\log_4 3$$

Ответ: Число отрицательное.

Пример четыре.

Определить знак числа.

$$\log_{1/11} 1/25 =$$

Перевернём дроби для того, чтобы числа стали больше единицы.

$$= \log_{11^{-1}} 25^{-1} =$$

Вынесем степени за знак логарифма.

$$= (-1)/(-1) \log_{11} 25 = \log_{11} 25$$

Ответ: Число положительное.

Пример пять.

Определить знак числа.

$$\log_{1/7} 35 =$$

Перевернём дробь в основании логарифма, чтобы число стало больше единицы.

$$= \log_{7^{-1}} 35 =$$

Вынесем степень за логарифм.

$$= 1 / (-1) \log_7 35 = -\log_7 35$$

Ответ: Число отрицательное.

Если основание и подлогарифмическое выражение логарифма больше единицы, то логарифм положительный, всегда.

б)) Алгоритм определения знака логарифма.

Для того чтобы определить знак логарифма, нужно:

1. Привести подлогарифмическое выражение и основание логарифма при помощи свойств степеней к числам большим единице в какой-то степени.

2. Вынести их степени и за знак логарифма и поделить их.

3. Посмотреть какой знак получился перед логарифмом.

Если получился плюс, то логарифм положительный.

Если получился минус, то логарифм отрицательный.

7)) Примеры на свойства логарифмов.

Девятое свойство.

Пример один.

Вычислить.

$$\log_{12} 2 + \log_{12} 72 =$$

Сложим логарифмы с одинаковыми основаниями. Получим логарифм с тем же основанием и произведением подлогарифмических выражений.

$$= \log_{12} (2 \times 72) = \log_{12} 144 =$$

Приведём логарифм к одинаковому основанию и подлогарифмическому выражению.

$$= \log_{12} 12^2 =$$

Вынесем степень за знак логарифма и заменим логарифм единицей.

$$= 2 \log_{12} 12 = 2 \times 1 =$$

Ответ: 2

Пример два.

$$\log_3 6 + \log_3 3/2 = \log_3 (6 \times 3/2) = \log_3 3^2 = 2 \log_3 3 = 2 \times 1 = 2$$

Ответ: 2

Десятое свойство.

Пример один.

$$\log_2 15 - \log_2 15/16 =$$

Вычтем логарифмы с одинаковыми основаниями. Получим логарифм с тем же основанием от частного подлогарифмических выражений.

$$= \log_2 (15 : 15/16) = \log_2 (15 \times 16 / 15) = \log_2 16 =$$

Приведём логарифм к одинаковому основанию и подлогарифмическому выражению в степени.

$$= \log_2 2^4 =$$

Вынесем степень за знак логарифма.

$$= 4 \log_2 2 =$$

Заменим логарифм единицей.

$$= 4 \times 1 = 4$$

Ответ: 4

Пример два.

$$\log_{1/3} 54 - \log_{1/3} 2 = \log_{1/3} 54/2 = \log_{1/3} 27 =$$

Заменим основание на не дробное.

$$= \log_3^{-1} 3^3 = 3 / (-1) \log_3 3 = -3$$

Ответ: - 3

Одиннадцатое свойство.

Пример один.

Вычислить.

$$\log_4 3 \log_9 2 =$$

Опустим один логарифм в знаменатель. При этом поменяем местами его основание и подлогарифмическое выражение.

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «Литрес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на Литрес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.