

Важная часть

Principia Mathematica, Vol. I. Newton
With three new additions



NEW WORLD BOOKS & PAPER CO.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

NEW YORK, N. Y.

Дифференциальные
уравнения Аллора
и их решения. Часть



Василиса Волконская
Дифференциальные уравнения.
Алгоритмы решения. 1 часть.

<https://litres.ru/74259299>

SelfPub; 2026

Аннотация

В серии этих книг собрано много методик по решению, школьной математики и высшей математики. В книгах подробно разобраны различные примеры для сдачи экзаменов в школе и в университете. Собраны многие правила и методики решения задач. Материал написан доступно для любого среднего ученика, который хочет понять математику, а не бездумно ее списать.

Василиса Волконская

Дифференциальные уравнения. Алгоритмы решения. 1 часть.

Содержание:

- 1) Определение дифференциального уравнения.
- 2) Алгоритм решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, с примером.
- 3) Примеры решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.
- 4) Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Алгоритм решения.
- 5) Решение примеров однородных дифференциальных уравнений первого порядка.
- 6) Линейные дифференциальные уравнения первой степени. Алгоритм решения.
- 7) Примеры линейных дифференциальных уравнений первой степени.
- 8) Уравнение Бернулли. Алгоритм решения, через замену переменной (переход к линейному уравнению). Первый способ.
- 9) Уравнение Бернулли. Алгоритм решения, способом

Бернулли. Второй способ.

10) Примеры решения уравнений Бернулли двумя способами.

1)) Дифференциальные уравнения.

Определение.

Дифференциальное уравнение - это уравнение, содержащее саму функцию $y = f(x)$; производные функции y' , y'' и т. д. или дифференциалы; и независимую переменную x .

Обыкновенным дифференциальным уравнением называют уравнение, в котором содержатся неизвестные, под знаком производной или под знаком дифференциала.

Чтобы решить дифференциальное уравнение, необходимо найти множество всех функций, которые удовлетворяют данному уравнению.

Проверить решённое дифференциальное уравнение можно, подставив найденную функцию в изначальное уравнение и убедиться, что уравнение обращается в верное тождество (равенство).

Дифференциальные уравнения бывают:

1. С разделяющимися переменными.
2. Однородные.
3. Уравнения в полных дифференциалах.
4. Линейные уравнения первого порядка.
5. Уравнения, допускающие понижение порядка.
6. Линейные уравнения второго порядка с постоянными

коэффициентами.

И так далее.

Обозначение производной.

$$y' = dy / dx$$

dy дифференциал зависимой переменной.

dx дифференциал независимой переменной.

y' первая производная функции.

Для того чтобы найти функцию по её производной, нужно найти первообразную этой функции. То есть проинтегрировать её.

2)) Уравнение с разделяющимися переменными.

Уравнения с разделяющимися переменными - это уравнения, которые можно привести к виду $f(y) dy = f(x) dx$

То есть разнести переменные x и y , в правую и в левую части уравнения.

Алгоритм решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, с примером.

Пример.

$$x y y' = 3x^2$$

Для того чтобы решить дифференциальное уравнение сводящееся к уравнению с разделяющимися переменными, нужно:

1. Посмотреть на уравнение и определить его вид.

В уравнении с разделяющимися переменными все переменные легко переносятся в разные стороны.

Одна переменная и её дифференциал переносятся в одну

сторону уравнения, а другая переменная и её дифференциал переносятся в другую сторону уравнения.

Если производная записана в виде штриха, то заменяем её на частное дифференциалов.

Обязательно дифференциал от зависимой переменной, должен делиться на дифференциал от независимой переменной.

В основном зависимая переменная - это y , а независимая переменная - это x .

Независимая переменная.

$$y = dy / dx$$

Зависимая переменная.

3. Если определили, что это уравнение с разделяющимися переменными и заменили производную частным дифференциалом. То переносим разные переменные и их дифференциалы в разные стороны; так чтобы дифференциалы обязательно находились в числителях дробей.

$$x y dy / dx = 3x^2$$

$$y dy = 3x^2 dx / x$$

$$y \, dy = 3x \, dx$$

4. После того как разделили переменные (перенесли их в разные стороны равенства), нужно избавиться от дифференциалов по этим переменным.

Для этого нужно проинтегрировать обе части уравнения.

$$\int y \, dy = \int 3x \, dx$$

5. Нужно найти каждый интеграл.

Если интегралы сложные, то можно их выписывать отдельно и решать. А потом вернуться к уравнению.

$$y^2 / 2 = 3x^2 / 2 + C$$

Так как при нахождении первообразной появляется любое число C , то после нахождения интегралов прибавляем число C один раз, с любой стороны равенства.

Обычно оно прибавляется со стороны независимой переменной x .

Если нужно умножить обе части равенства на одно и то же число, то и C умножается на него и получается, тоже любое число $C1$.

$$y^2 = 3x^2 + C1, \text{ где } C1 = 2C$$

Число C не нужно записывать, умноженным на другое число. Так как это тоже любое число $C1$.

Если нужно сложить любое число (C) с логарифмом, для того чтобы потом опустить логарифмы; то натуральный логарифм от любого числа, это тоже любое число.

$$C1 = \ln C \text{ любое число (konst) константа.}$$

Любое число обозначается латинским словом константа

(konst).

6. Если легко выражается зависимая переменная через независимую переменную, то выразить её.

Если трудно это сделать, то лучше решение оставить, как есть. Чтобы не наделать лишних ошибок.

$$y = \sqrt{(3x^2 + C1)}, \text{ где } C1 = 2C$$

7. При разделении переменных предполагалось, что знаменатели не равны нулю.

Нужно проверить не являются ли они решениями уравнения, подставив их в первоначальное уравнение.

Если при подстановке каждого множителя, получается верное равенство, то он является решением уравнения.

$$x = 0$$

Подставим в первоначальное уравнение ноль.

$$x y y' = 3x^2$$

$$0 y y' = 3 \times 0^2$$

$$0 = 0$$

Получили верное равенство.

Иногда этот корень уже может входить в решение, при каком-либо значении константы C .

Тогда дополнительно найденный корень можно не записывать в ответ. Так как он уже входит в решение.

8. Записать ответ.

$$\text{Ответ: } y = \sqrt{(3x^2 + C1)}$$

$$x = 0$$

В этом случае нужно записать дополнительный корень в

ответ уравнения. Так как какую бы константу C_1 мы не выбрали, $x = 0$ не входит в решение.

Например.

$$x y' = y - 5$$

$$x \, dy / dx = y - 5$$

$$dy / (y - 5) = dx / x$$

$$\int dy / (y - 5) = \int dx / x$$

$$\int d(y - 5) / (y - 5) = \int dx / x$$

$$\ln |y - 5| = \ln |x| + \ln C$$

$$\ln |y - 5| = \ln |C x|$$

$$y - 5 = C x$$

$$y = C x + 5$$

Делим на x ($y - 5$)

$$x = 0 \quad y = 5$$

$y = 5$ (входит в решение, при $C = 0$)

Ответ: $y = C x + 5$

$$x = 0$$

3)) Примеры решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Пример один.

$$y y' = x^5 - x$$

Посмотрим на уравнение.

Производную можно представить в виде частного дифференциалов и перенести переменные и их дифференциалы в разные стороны.

$$y \, dy / dx = x^5 - x$$

$$y \, dy = (x^5 - x) \, dx$$

Проинтегрируем обе части уравнения.

$$\int y \, dy = \int (x^5 - x) \, dx$$

Найдём интегралы.

$$Y^2 / 2 = x^6 / 6 - x^2 / 2 + C$$

Умножим обе части уравнения на два.

$$y^2 = 2x^6 / 6 - x^2 + C1, \text{ где } C1 = 2C$$

$$y^2 = x^6 / 3 - x^2 + C1$$

Выразим зависимую переменную через независимую переменную. Извлечём квадратный корень.

$$y = \sqrt{(x^6 / 3 - x^2 + C1)}$$

Запишем ответ.

$$\text{Ответ: } y = \sqrt{(x^6 / 3 - x^2 + C1)}$$

Пример два.

$$x y' = y - 5$$

$$x \, dy / dx = y - 5$$

$$d y / (y - 5) = dx / x$$

$$\int d y / (y - 5) = \int dx / x$$

$$\ln |y - 5| = \ln |x| + \ln C$$

Сложим логарифмы с одинаковыми основаниями.

$$\ln |y - 5| = \ln Cx$$

Опустим логарифмы с одинаковыми основаниями.

$$|y - 5| = |C x|$$

Предположим, что выражения будут всегда положительными и опустим модули.

$$y - 5 = C x$$

Перенесём число вправо.

$$y = C x + 5$$

Ответ: $y = C x + 5$

$$x = 0$$

Пример три.

$$(1 + x^3) y^3 dx - (y^2 - 1) x^3 dy = 0$$

В этом уравнении уже явно видны дифференциалы и переменные. Перенесём разные переменные в разные стороны.

$$((x^3 + 1) / x^3) dx = ((y^2 - 1) / y^3) dy$$

Проинтегрируем обе части уравнения.

$$\int ((x^3 + 1) / x^3) dx = \int ((y^2 - 1) / y^3) dy$$

Найдём интегралы.

$$\int (1 + 1 / x^3) dx = \int (y^2 / y^3 - 1 / y^3) dy$$

$$\int 1 / x^3 dx + \int dx = \int dy / y - \int dy / y^3$$
$$- 1/2 \times 1 / x^2 + x = \ln y + 1/2 \times 1 / y^2 + C$$

Поменяем местами равенство.

$$\ln y + 1 / 2 y^2 = x - 1 / 2 x^2 + C$$

Выразить зависимую переменную трудно, поэтому запишем ответ, так как есть.

Ответ: $\ln y + 1 / 2 y^2 = x - 1 / 2 x^2 + C$

Пример четыре.

$$(y^2 + 3) dx - y e^x dy / x = 0$$

Перенесём переменные и их дифференциалы в разные стороны.

$$(y^2 + 3) dx = (y e^x / x) dy$$

$$(x / e^x) dx = (y / (y^2 + 3)) dy$$

Проинтегрируем обе части уравнения.

$$\int (x / e^x) dx = \int (y / (y^2 + 3)) dy$$

Найдём интегралы.

Так как интегралы сложные, найдём их по отдельности.

$$\int (y / (y^2 + 3)) dy = \int y dy / (y^2 + 3) =$$

Внесём переменную из числителя под дифференциал.

Найдём первообразную.

$$= 1/2 \int dy^2 / (y^2 + 3) =$$

Сделаем аргументы одинаковыми. Прибавим тройку под дифференциалом.

$$= 1/2 \int d(y^2 + 3) / (y^2 + 3) =$$

Найдём табличные интегралы.

$$= 1/2 \ln |y^2 + 3| + C = \ln \sqrt{(y^2 + 3)} + C$$

$$\int x dx / e^x = \int (-x) e^{-x} d(-x) =$$

Сделаем замену переменной.

Пусть $-x = t$

$$= \int t e^t dt =$$

$$= \int t d e^t =$$

Применим формулу интегрирования по частям.

$$= t e^t - \int e^t dt =$$

$$= t e^t - e^t + C$$

Сделаем обратную замену переменной.

$$= -x e^{-x} - e^{-x} + C$$

Вернёмся к дифференциальному уравнению.

Запишем первообразные и прибавим C один раз справа.

$$\ln \sqrt{y^2 + 3} = -x e^{-x} - e^{-x} + C$$

$$\ln \sqrt{y^2 + 3} = -x / e^x - 1 / e^x + C$$

Можно выразить зависимую переменную через независимую переменную.

$$1/2 \ln (y^2 + 3) = (-x - 1) / e^x + C$$

$$\ln (y^2 + 3) = -2 (x + 1) / e^x + C$$

$$(y^2 + 3) = e^{-2 (x + 1) / e^x + C}$$

$$y^2 = e^{-2 (x + 1) / e^x} \times e^C - 3$$

$$y^2 = e^{-2 (x + 1) / e^x} \times C_1 - 3$$

$$y = \sqrt{e^{-2 (x + 1) / e^x} \times C_1 - 3}$$

Проверим, является ли решением выражение, на которое делили, равное нулю.

$$e^x (y^2 + 3) = 0$$

$$e^x \neq 0$$

$$y^2 \neq -3$$

Корней нет.

$$\text{Ответ: } y = \sqrt{(e^{-2(x+1)/e^x} \times C1 - 3)}$$

Пример пять.

$$(2 + y) dx - (2 - x) dy = 0$$

Перенесём переменные и их дифференциалы в разные стороны.

$$(2 + y) dx = (2 - x) dy$$

$$dx / (2 - x) = dy / (2 + y)$$

Проинтегрируем обе части уравнения.

$$\int dx / (2 - x) = \int dy / (2 + y)$$

$$\int dy / (2 + y) = \int dx / (2 - x)$$

Сделаем аргументы одинаковыми.

$$\int d(y + 2) / (2 + y) = - \int d(2 - x) / (2 - x)$$

Найдём табличные интегралы.

Любое число сразу запишем в виде натурального логарифма.

$$\ln |y + 2| = - \ln |2 - x| + \ln C$$

Вычтем логарифмы с одинаковыми основаниями.

$$\ln |y + 2| = \ln C - \ln |2 - x|$$

$$\ln |y + 2| = \ln (C / |2 - x|)$$

Опустим логарифмы с одинаковыми основаниями.

$$|y + 2| = C / |2 - x|$$

Предположим, что выражения под модулями положительны и опустим модули.

$$y + 2 = C / (2 - x)$$

$$y = C / (2 - x) - 2$$

Проверим, являются ли решениями.

$$(y + 2)(2 - x) = 0$$

$$y = -2 \quad x = 2$$

(входит в решение).

$$\text{Ответ: } y = C / (2 - x) - 2;$$

Сделаем проверку.

$$(2 + y) dx - (2 - x) dy = 0$$

В этом уравнении производная дана неявно. То есть, даны дифференциалы от зависимой и независимой переменной.

$$y = C / (2 - x) - 2$$

Найдём производную полученной функции.

$$y' = (C' (2 - x) - C (2 - x)') / (2 - x)^2 = C / (2 - x)^2$$

$$y' = C / (2 - x)^2$$

Подставим в первоначальное уравнение функцию и её производную.

$$(2 + y) dx - (2 - x) dy = 0$$

Для того чтобы определить, где производная, преобразуем уравнение.

$$(2 + y) dx = (2 - x) dy$$

$$(2 + y) / (2 - x) = dy / dx$$

$$y' = (2 + y) / (2 - x)$$

$$C / (2 - x)^2 = (2 + C / (2 - x) - 2) / (2 - x)$$

$$C / (2 - x)^2 = C / (2 - x)^2$$

Получили верное равенство.

Уравнение решено правильно.

Пример шесть.

$$x^2 dy + (y - 1) dx = 0$$

Перенесём переменные и их дифференциалы в разные стороны.

$$x^2 dy = - (y - 1) dx$$

$$x^2 dy = (1 - y) dx$$

$$dy / (1 - y) = dx / x^2$$

Проинтегрируем обе части уравнения.

$$\int dy / (1 - y) = \int dx / x^2$$

Сделаем аргументы под дифференциалом и под интегралом одинаковыми.

$$- \int d(1 - y) / (1 - y) = \int dx / x^2$$

Найдём табличные интегралы.

$$- \ln |1 - y| = - 1 / x + C$$

Умножим обе части уравнения на (- 1)

$$\ln |1 - y| = 1 / x + C1, \text{ где } C1 = - C$$

Выразим зависимую переменную через независимую переменную.

$$1 - y = e^{1/x + C_1}$$

$$1 - y = e^{1/x} e^{C_1}$$

$$1 - y = e^{1/x} C_2, \text{ где } C_2 = e^{C_1}$$

$$-y = e^{1/x} C_2 - 1$$

$$y = 1 - e^{1/x} C_2$$

$$\text{Ответ: } y = 1 - e^{1/x} C_2$$

Сделаем проверку.

Найдём производную полученной функции.

$$y' = -e^{1/x} C_2 (-1/x^2)$$

$$y' = e^{1/x} C_2 / x^2$$

Преобразуем первоначальное уравнение так, чтобы появилась производная из частного дифференциалов.

$$x^2 dy + (y - 1) dx = 0$$

$$x^2 dy = - (y - 1) dx$$

$$x^2 dy = (1 - y) dx$$

$$dy / dx = (1 - y) / x^2$$

$$y' = (1 - y) / x^2$$

Подставим полученную в ответе функцию и её производную в уравнение.

$$e^{1/x} / x^2 C_2 = (1 - 1 + e^{1/x} C_2) / x^2$$

$$e^{1/x} C_2 / x^2 = e^{1/x} C_2 / x^2$$

Получилось верное равенство. Уравнение решено пра-

Вильно.

Пример семь.

$$y' \cos x - y \sin x = 0$$

Запишем производную в виде частного дифференциалов.

$$(dy / dx) \cos x - y \sin x = 0$$

Перенесём в разные стороны переменные и их дифференциалы.

$$(dy / dx) \cos x = y \sin x$$

$$dy / y = (\sin x / \cos x) dx$$

Проинтегрируем обе части уравнения.

$$\int dy / y = \int \sin x dx / \cos x$$

Найдём первообразную.

$$\int dy / y = - \int d \cos x / \cos x$$

Аргументы одинаковые, найдём табличные интегралы.

$$\ln |y| = \ln C - \ln |\cos x|$$

Константу (любое число) прибавим в виде натурального логарифма и вычтем логарифмы с одинаковыми основаниями.

$$\ln |y| = \ln |C / \cos x|$$

Опустим логарифмы с одинаковыми основаниями и предположим, что выражение будут положительными. Опустим модули.

$$y = C / \cos x$$

Проверим, входит ли в решение

$$y \cos x = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \pi/2 + \pi n; n \in \mathbb{Z}.$$

$y = 0$ (входит в решение, при $C = 0$)

Ответ: $y = C / \cos x$

$$x = \pi/2 + \pi n; n \in \mathbb{Z}.$$

Проверка.

$$y' = (C' \cos x - C \sin x) / \cos^2 x = C \sin x / \cos^2 x$$

Подставим полученную в ответе функцию и её производную в первоначальное уравнение.

$$y' \cos x - y \sin x = 0$$

$$(C \sin x / \cos^2 x) \cos x - C \sin x / \cos x = 0$$

$$C \sin x / \cos x - C \sin x / \cos x = 0$$

$$0 = 0$$

Получили верное равенство. Ответ верный.

Пример восемь.

(Звездочка это x)

$$(e^* + 2) y' = y e^*$$

Заменим производную частным дифференциалов.

$$(e^* + 2) dy / dx = y e^*$$

Перенесём в разные стороны разные переменные и их дифференциалы.

$$(e^* + 2) dy = y e^* dx$$

$$dy / y = e^* dx / (e^* + 2)$$

Проинтегрируем обе части уравнения.

$$\int dy / y = \int e^* dx / (e^* + 2)$$

Второй интеграл сложный. Найдём его отдельно.

$$\int e^* dx / (e^* + 2) =$$

Сделаем замену переменной.

Пусть $e^* = t$ тогда

$$x = \ln t$$

$$dx = d \ln x = (1 / t) dt$$

$$\int (t / t) d t / (t + 2) = \int d (t + 2) / (t + 2) = \ln |t + 2| + \ln C =$$

Сделаем обратную замену.

$$= \ln |e^* + 2| + \ln C$$

Вернёмся к уравнению.

$$\ln |y| = \ln |e^* + 2| + \ln C$$

Сложим логарифмы с одинаковыми основаниями.

$$\ln |y| = \ln |(e^* + 2) C|$$

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «Литрес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на Литрес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.