

Василиса Волконская

Дифференциальные
уравнения.
Алгоритмы
решения. Вторая
часть.

Василиса Волконская

**Дифференциальные
уравнения. Алгоритмы
решения. Вторая часть.**

«Автор»

2026

Волконская В.

Дифференциальные уравнения. Алгоритмы решения. Вторая часть.
/ В. Волконская — «Автор», 2026

В серии этих книг собрано много методик по решению и школьной математики и высшей математики. В книгах подробно разобраны различные примеры, для сдачи экзаменов и в школе и в университете. Собраны многие правила и методики решения задач. Материал написан доступно для любого среднего ученика, который хочет понять математику, а не бездумно ее списать.

© Волконская В., 2026

© Автор, 2026

Василиса Волконская

Дифференциальные уравнения.

Алгоритмы решения. Вторая часть.

Содержание:

1) Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Алгоритм решения.

2) Примеры решения однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

3) Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка. Алгоритм решения.

4) Примеры решения неоднородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами второго порядка.

1)) Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами бывают:

1) Однородные.

2) Неоднородные.

1) Однородные уравнения выглядят так:

С левой стороны стоит сумма зависимой переменной (y) с коэффициентом, её производной (y') с коэффициентом, и её второй производной (y'') с коэффициентом; а с правой стороны стоит ноль.

Алгоритм решения однородных линейных уравнений второй степени с постоянными коэффициентами, с примерами.

Для того чтобы решить однородные линейные уравнения второй степени с постоянными коэффициентами, нужно:

1. Составить характеристическое уравнение.

Примеры.

а) $y'' - 5y' + 6y = 0$

б) $y'' - 4y' = 0$

в) $y'' - 25y = 0$

г) $y'' + 2y' + y = 0$

д) $3y'' = 0$

е) $y'' + 2y' + 5y = 0$

ж) $y'' + 9y = 0$

При составлении характеристического уравнения, нужно производную второго порядка заменить на k^2 , производную первого порядка заменить на k , а y функции оставить только коэффициент.

$$y'' = k^2$$

$$y' = k$$

$$y = 1$$

а) $k^2 - 5k + 6 = 0$

б) $k^2 - 4k = 0$

в) $k^2 - 25 = 0$

г) $k^2 + 2k + 1 = 0$

д) $3k^2 = 0$

е) $k^2 + 2k + 5 = 0$

ж) $k^2 + 9 = 0$

2. Определить вид характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение - это квадратное уравнение.

Оно может быть полным или неполным.

Оно может иметь:

1) Два различных действительных корня.

2) Два одинаковых действительных корня.

3) Два различных комплексных корня.

В зависимости от этого появляются три вида однородных линейных уравнений второй степени с постоянными коэффициентами.

1) Если характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, тогда $D > 0$.

Если оно полное, имеющее два различных действительных корня, то оно выглядит так:

$$mk^2 + pk + q = 0$$

$$m \neq 0 \quad p \neq 0 \quad q \neq 0$$

$$D = p^2 - 4mq > 0$$

$$k_1 = (-p + \sqrt{D}) / 2m$$

$$k_2 = (-p - \sqrt{D}) / 2m$$

Неполное уравнение выглядит так:

$$1) \quad mk^2 \pm pk = 0$$

$$m \neq 0 \quad p \neq 0 \quad q = 0$$

$$k(mk \pm p) = 0$$

$$k = 0$$

$$mk \pm p = 0$$

$$mk = \pm p$$

$$k = \pm p / m$$

$$2) \quad mk^2 - q = 0$$

$$m \neq 0 \quad p = 0 \quad q < 0$$

$$mk^2 = q$$

$$k^2 = q / m$$

$$k_1 = \sqrt{q / m}$$

$$k_2 = -\sqrt{q / m}$$

$$a) \quad k^2 - 5k + 6 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$k_1 = (5 + 1) / 2 = 3$$

$$k_2 = (5 - 1) / 2 = 2$$

$$б) \quad k^2 - 4k = 0$$

$$k(k - 4) = 0$$

$$k = 0$$

$$k = 4$$

$$в) \quad k^2 - 25 = 0$$

$$k^2 = 25$$

$$k_1 = 5$$

$$k_2 = -5$$

2) Если характеристическое уравнение имеет один действительный корень или два совпадающих корня, то полное квадратное уравнение выглядит так:

$$mk^2 + pk + q = 0$$

$$m \neq 0 \quad p \neq 0 \quad q \neq 0$$

$$D = p^2 - 4mq = 0$$

$$k_1 = (-p + \sqrt{0}) / 2m = -p / 2m$$

Неполное квадратное уравнение выглядит так:

$$mk^2 = 0$$

$$m \neq 0 \quad p = 0 \quad q = 0$$

$$k^2 = 0$$

$$k = 0$$

$$r) \quad k^2 + 2k + 1 = 0$$

$$D = 4 - 4 = 0$$

$$k = -2 / 2 = -1$$

$$д) \quad 3k^2 = 0$$

$$k^2 = 0$$

$$k = 0$$

3) Если характеристическое уравнение имеет два различных комплексных корня, то полное квадратное уравнение выглядит так:

$$mk^2 + pk + q = 0$$

$$m \neq 0 \quad p \neq 0 \quad q \neq 0$$

$$D = p^2 - 4mq < 0$$

$$k_1 = (-p + \sqrt{(-D)}) / 2m = \alpha + \beta i$$

$$k_2 = (-p - \sqrt{(-D)}) / 2m = \alpha - \beta i$$

Действительная часть

$$\alpha \pm \beta i$$

Мнимая часть

Неполное квадратное уравнение выглядит так:

$$mk^2 + q = 0$$

$$m \neq 0 \quad p = 0 \quad q > 0$$

$$mk^2 = -q$$

$$k^2 = -q/m$$

$$k_1 = \sqrt{(-q/m)} = 0 + \beta i = \beta i$$

$$k_2 = -\sqrt{(-q/m)} = 0 - \beta i = -\beta i$$

$$е) \quad k^2 + 2k + 5 = 0$$

$$D = 4 - 20 = -16$$

$$k_1 = (-2 + \sqrt{(-16)}) / 2 = (-2 + 4i) / 2 = -1 + 2i$$

$$k_2 = (-2 - \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}) / 2 = (-2 - 4i) / 2 = -1 - 2i$$

$$\text{ж) } k^2 + 9 = 0$$

$$k^2 = -9$$

$$k_1 = \sqrt{-9}$$

$$k_2 = -\sqrt{-9}$$

$$k_1 = 3i$$

$$k_2 = -3i$$

3. Для каждого вида уравнения нужно найти решение.

Если два различных действительных корня, то для полного квадратного уравнения решение однородного дифференциального уравнения, вычисляется по формуле:

$$m y'' + p y' + q y = 0$$

$$m k^2 + p k + q = 0$$

$$m \neq 0 \quad p \neq 0 \quad q \neq 0$$

$$D = p^2 - 4mq > 0$$

$$k_1 = (-p + \sqrt{D}) / 2m$$

$$k_2 = (-p - \sqrt{D}) / 2m$$

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

Где $k_1; k_2$ действительные корни квадратного уравнения.

Для неполного квадратного уравнения, решение однородного дифференциального уравнения, вычисляется по формуле:

$$m y'' + p y' = 0$$

$$m k^2 \pm p k = 0$$

$$m \neq 0 \quad p \neq 0 \quad q = 0$$

$$k(mk \pm p) = 0$$

$$k_1 = 0$$

$$m k \pm p = 0$$

$$m k = \pm p$$

$$k_2 = \pm p / m$$

Один корень характеристического уравнения равен нулю.

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{k_2 x}$$

$$y = C_1 + C_2 e^{k_2 x}$$

где k_2 корень характеристического уравнения неравный нулю.

$$m y'' + q y = 0$$

$$m k^2 - q = 0$$

$$m \neq 0 \quad p = 0$$

$$q < 0 \quad m > 0;$$

$$\begin{aligned}q &> 0 \quad m < 0 \\m k^2 &= q \\k^2 &= q / m \\k_1 &= \sqrt{q / m} \\k_2 &= -\sqrt{q / m}\end{aligned}$$

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

Где $k_1; k_2$ противоположные корни квадратного характеристического уравнения.

$$\begin{aligned}\text{а) } y'' - 5y' + 6 &= 0 \\k^2 - 5k + 6 &= 0 \\D &= 25 - 24 = 1 \\k_1 &= (5 + 1) / 2 = 3 \\k_2 &= (5 - 1) / 2 = 2\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

$$\begin{aligned}\text{б) } y'' - 4y' &= 0 \\k^2 - 4k &= 0 \\k(k - 4) &= 0 \\k &= 0 \\k &= 4\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } y = C_1 + C_2 e^{4x}$$

$$\begin{aligned}\text{в) } y'' - 25 &= 0 \\k^2 - 25 &= 0 \\k^2 &= 25 \\k_1 &= 5 \\k_2 &= -5\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-5x}$$

Если один действительный квадратный корень или два совпадающих действительных корня, решение однородного уравнения вычисляется по формуле:

Полное квадратное уравнение.

$$m y'' + p y' + q y = 0$$

$$\begin{aligned} m k^2 + p k + q &= 0 \\ m \neq 0 \quad p \neq 0 \quad q \neq 0 \\ D = p^2 - 4 m q &= 0 \\ k_1 = (-p + \sqrt{0}) / 2m &= -p / 2m \end{aligned}$$

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$$

Неполное квадратное уравнение.

$$\begin{aligned} m y'' &= 0 \\ m k^2 &= 0 \\ m \neq 0 \quad p = 0 \quad q &= 0 \\ k^2 &= 0 \\ k &= 0 \end{aligned}$$

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x}$$

$$y = C_1 + x C_2$$

$$\begin{aligned} \text{г) } y'' + 2 y' + 1 &= 0 \\ k^2 + 2 k + 1 &= 0 \\ D = 4 - 4 &= 0 \\ k = -2 / 2 &= -1 \end{aligned}$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \text{д) } 3 y'' &= 0 \\ 3 k^2 &= 0 \\ k^2 &= 0 \\ k &= 0 \end{aligned}$$

$$y = C_1 + x C_2$$

Если два различных комплексных корня, то решение однородного уравнения, вычисляется по формуле:

Полное квадратное уравнение.

$$m y'' + p y' + q y = 0$$

$$m k^2 + p k + q = 0$$

$$m \neq 0 \quad p \neq 0 \quad q \neq 0$$

$$D = p^2 - 4 m q < 0$$

$$k_1 = (-p + \sqrt{(-D)}) / 2m = \alpha + \beta i$$

$$k_2 = (-p - \sqrt{(-D)}) / 2m = \alpha - \beta i$$

$$y = C_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cos \beta x$$

Неполное квадратное уравнение.

$$m y'' + q y = 0$$

$$m k^2 + q = 0$$

$$m \neq 0 \quad p = 0$$

$$q > 0 \quad m > 0;$$

$$q < 0 \quad m < 0$$

$$m k^2 = -q$$

$$k^2 = -q/m$$

$$k_1 = \sqrt{(-q/m)} = 0 + \beta i = \beta i$$

$$k_2 = -\sqrt{(-q/m)} = 0 - \beta i = -\beta i$$

$$y = C_1 e^{0x} \sin \beta x + C_2 e^{0x} \cos \beta x$$

$$y = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x$$

$$е) y'' + 2 y' + 5 = 0$$

$$k^2 + 2 k + 5 = 0$$

$$D = 4 - 20 = -16$$

$$k_1 = (-2 + \sqrt{(-16)}) / 2 = (-2 + 4) / 2 = -1 + 2 i$$

$$k_2 = (-2 - \sqrt{(-16)}) / 2 = (-2 - 4) / 2 = -1 - 2 i$$

$$y = C_1 e^{-x} \sin 2x + C_2 e^{-x} \cos 2x$$

$$ж) y'' + 9 = 0$$

$$k^2 + 9 = 0$$

$$k^2 = -9$$

$$k_1 = \sqrt{-9}$$

$$k_2 = -\sqrt{-9}$$

$$k_1 = 3i$$

$$k_2 = -3i$$

$$y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x$$

4) записать ответ.

Для дифференциальных уравнений с действительными корнями, общее решение однородного уравнения, записываются в показательной форме.

Для дифференциальных уравнений с комплексными корнями, общее решение одного уравнения, записывается в тригонометрической форме.

Запишем в табличку всё, что нужно запомнить для решения дифференциального однородного уравнения с постоянными коэффициентами второй степени.

Два различных действительных корня.

$$1) m y'' + p y' + q y = 0$$

$$m k^2 + p k + q = 0$$

$$m \neq 0 \quad p \neq 0 \quad q \neq 0$$

$$D = p^2 - 4 m q > 0$$

$$k_1 = (-p + \sqrt{D}) / 2m$$

$$k_2 = (-p - \sqrt{D}) / 2m$$

$$2) m y'' - q y = 0$$

$$m \neq 0 \quad p = 0$$

$$q < 0 \quad m > 0;$$

$$q > 0 \quad m < 0$$

$$m k^2 - q = 0$$

$$m k^2 = q$$

$$k^2 = q / m$$

$$k_1 = \sqrt{q / m}$$

$$k_2 = -\sqrt{q / m}$$

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

$$3) m y'' + p y' = 0$$

$$m \neq 0 \quad p \neq 0 \quad q = 0$$

$$m k^2 \pm p k = 0$$

$$k(m k \pm p) = 0$$

$$k_1 = 0$$

$$m k \pm p = 0$$

$$m k = \pm p$$

$$k_2 = \pm p / m$$

$$y = C_1 e^{0 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

$$y = C_1 + C_2 e^{k_2 x}$$

Два совпадающих действительных корня (один корень).

$$1) m y'' + p y' + q y = 0$$

$$m k^2 + p k + q = 0$$

$$m \neq 0 \quad p \neq 0 \quad q \neq 0$$

$$D = p^2 - 4 m q = 0$$

$$k = (-p + \sqrt{D}) / 2m = -p / 2m$$

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$$

$$2) m y'' = 0$$

$$m \neq 0 \quad p = 0 \quad q = 0$$

$$m k^2 = 0$$

$$k^2 = 0$$

$$k = 0$$

$$y = C_1 e^{0 x} + C_2 e^{k x}$$

$$y = C_1 + C_2 e^{k x}$$

Два различных комплексных корня.

$$1) m y'' + p y' + q y = 0$$

$$m \neq 0 \quad p \neq 0 \quad q \neq 0$$

$$m k^2 + p k + q = 0$$

$$D = p^2 - 4 m q < 0$$

$$k_1 = (-p + \sqrt{(-D)}) / 2m = \alpha + \beta i$$

$$k_2 = (-p - \sqrt{(-D)}) / 2m = \alpha - \beta i$$

$$y = C_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$2) m y'' + q y = 0$$

$$m \neq 0 \quad p = 0$$

$$q > 0 \quad m > 0;$$

$$q < 0 \quad m < 0$$

$$m k^2 + q = 0$$

$$m k^2 = -q$$

$$k^2 = -q / m$$

$$k_1 = \sqrt{(-q / m)} = 0 + \beta i = \beta i$$

$$k_2 = -\sqrt{(-q / m)} = 0 - \beta i = -\beta i$$

$$y = C_1 e^{0x} \sin \beta x + C_2 e^{0x} \cos \beta x$$

$$y = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x$$

2)) Примеры решения однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка (Звёздочка - это x).

Пример один.

$$y'' + y' - 2y = 0$$

Составим характеристическое уравнение.

$$k^2 + k - 2 = 0$$

$$D = 1 + 4 \times 2 = 9 = 3^2$$

$$k_1 = (-1 + 3) / 2 = 1$$

$$k_2 = (-1 - 3) / 2 = -2$$

$$\text{Ответ: } Y = C_1 e^{*} + C_2 e^{-2*}$$

Пример два.

$$y'' - 4y = 0$$

Составим характеристическое уравнение.

$$k^2 - 4 = 0$$

$$k^2 = 4$$

$$k_1 = 2$$

$$k_2 = -2$$

$$\text{Ответ: } y = C_1 e^{2*} + C_2 e^{-2*}$$

Пример три.

$$y'' - 9y' = 0$$

Составим характеристическое уравнение.

$$k^2 - 9k = 0$$

$$k(k - 9) = 0$$

$$k_1 = 0$$

$$k - 9 = 0$$

$$k_2 = 9$$

$$\text{Ответ: } y = C_1 + C_2 e^{9*}$$

Пример четыре.

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Составим характеристическое уравнение.

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

$$D = 16 - 16 = 0$$

$$k = 4 / 2 = 2$$

$$\text{Ответ: } y = C_1 e^{2*} + C_2 x e^{2*}$$

Пример пять.

$$8y'' = 0$$

Составим характеристическое уравнение.

$$8k^2 = 0$$

$$k^2 = 0$$

$$k = 0$$

$$\text{Ответ: } y = C_1 + C_2 x$$

Пример шесть.

$$y'' + y = 0$$

Составим характеристическое уравнение.

$$k^2 + 1 = 0$$

$$k^2 = -1$$

$$k_1 = \sqrt{-1}$$

$$k_1 = i$$

$$k_2 = -\sqrt{-1}$$

$$k_2 = -i$$

$$\text{Ответ: } y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

Пример семь.

$$y'' + 6y' + 13y = 0$$

Составим характеристическое уравнение.

$$k^2 + 6k + 13 = 0$$

$$D = 36 - 52 = -16$$

$$k_1 = (-6 + \sqrt{-16}) / 2 = -3 + 2i$$

$$k_2 = (-6 - \sqrt{(-16)}) / 2 = -3 - 2i$$

$$\text{Ответ: } y = C_1 e^{-3x} \sin 2x + C_2 e^{-3x} \cos 2x$$

Пример восемь.

$$4y'' - 8y' + 5y = 0$$

Составим характеристическое уравнение.

$$4k^2 - 8k + 5 = 0$$

$$D = 64 - 80 = -16$$

$$k_1 = (8 + \sqrt{(-16)}) / 8 = (8 + 4i) / 8 = 1 + 1/2 i$$

$$k_2 = (8 - \sqrt{(-16)}) / 8 = (8 - 4i) / 8 = 1 - 1/2 i$$

$$\text{Ответ: } y = C_1 e^{x/2} \sin 1/2 x + C_2 e^{x/2} \cos 1/2 x$$

Пример девять.

$$y''' - 5y'' + 4y' = 0$$

Составим характеристическое уравнение.

$$k^3 - 5k^2 + 4k = 0$$

Получим кубическое уравнение.

Вынесем k за скобку.

$$k(k^2 - 5k + 4) = 0$$

$$k = 0$$

$$k^2 - 5k + 4 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9 = 3^2$$

$$k_1 = (5 + 3) / 2 = 4$$

$$k_2 = (5 - 3) / 2 = 1$$

$$\text{Ответ: } y = C_1 + C_2 e^{4x} + C_3 e^x$$

Если уравнение кубическое, то добавляется ещё одно слагаемое.

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + C_3 e^{k_3 x}$$

Пример десять.

$$y''' + 9y' = 0$$

Составим характеристическое уравнение.

$$k^3 + 9k = 0$$

Получим кубическое уравнение.

Вынесем k за скобку.

$$k(k^2 + 9) = 0$$

$$k = 0$$

$$k^2 + 9 = 0$$

$$k^2 = -9$$

$$k_1 = \sqrt{(-9)}$$

$$k_1 = 3i$$

$$k_2 = -\sqrt{(-9)}$$

$$k_2 = -3i$$

Это уравнение с комплексными корнями.

$$\text{Ответ: } y = C_1 + C_2 \sin 3x + C_3 \cos 3x$$

Это смешанное уравнение один корень действительный и два комплексных. Следовательно

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{kx} \sin \beta x + C_3 e^{kx} \cos \beta x$$

Пример одиннадцать.

$$y''' - 13y' + 12y = 0$$

Составим характеристическое уравнение.

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «Литрес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на Литрес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.