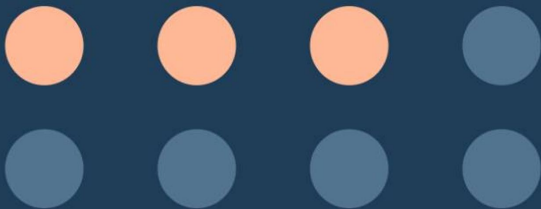


ГЛЕБ ЗАЙЦЕВ

Вероятность по шагам

От выбора исходов к понятному ответу



20 моделей

40 задач с решениями

Условия · подсказки · полные разборы

Без программирования и высшей математики

Глеб Зайцев
Вероятность по
шагам. 20 моделей и
40 задач с решениями

<https://litres.ru/74417327>

SelfPub; 2026

Аннотация

Почему случайный выбор папки не равен случайному выбору файла? Как меняется шанс после новой информации? И почему ожидаемое число не обязано встретиться в отдельном опыте? В книге — 20 моделей случайного выбора: от цветных жетонов и подсчёта вариантов до условной вероятности, независимости и математического ожидания. Каждая модель сопровождается коротким объяснением, задачей с подсказками и новым упражнением; полные решения всех 40 задач вынесены в отдельную часть. Достаточно знать обыкновенные дроби и школьную арифметику. Программирование и математический анализ не нужны. Все опыты учебные, правила выбора заданы явно. Практикум не является курсом статистических прогнозов и не обещает результатов на экзамене.

Содержание

Перед началом	5
Сначала опыт, потом дробь	5
Небольшой словарь и арифметическая опора	7
Как работать с двумя задачами в каждой модели	9
Карта книги	11
Двадцать моделей: условия и упражнения	12
Модель 1. Один выбор: что считать исходом	12
Модель 2. Два уровня выбора: равные папки не равны файлам	15
Модель 3. Два числа: порядок важен даже для суммы	18
Модель 4. Слово «или»: как не посчитать пересечение дважды	20
Модель 5. Возврат жетона: когда второй шанс меняется	22
Модель 6. Хотя бы один: посчитать то, чего не случилось	25
Модель 7. Строка из символов: правило произведения	27
Модель 8. Две карточки рядом: собираем блок	29
Модель 9. Пара участников: выбрать по одному из двух групп	31

Модель 10. Ровно два отмеченных: состав выборки	33
Конец ознакомительного фрагмента.	35

Глеб Зайцев

Вероятность по шагам. 20 моделей и 40 задач с решениями

Перед началом

Сначала опыт, потом дробь

На столе лежит коробка с жетонами. Слово «случайно» кажется достаточным: не смотрим, тянем, считаем. Но если маленькие жетоны чаще проваливаются на дно, одинаковых шансов может не быть. В учебной задаче мы не проверяем настоящую коробку. Мы договариваемся о модели: например, каждый из восьми отдельных жетонов имеет шанс $1/8$ оказаться выбранным. Именно эта договорённость позволяет считать дальше.

В этой книге вопрос «как выбирают?» важнее вопроса «какую формулу применить?». Выбрать сначала папку, а затем файл — не то же самое, что выбрать один файл из общего списка. Извлечь два предмета с возвращением — не то

же самое, что убрать первый в сторону. Изменённое правило создаёт другой опыт, даже когда слова «папка», «файл» и «предмет» остаются прежними.

Цель практикума — научиться переводить короткое условие в прозрачную конечную модель. Вы сможете выписать исходы, проверить их равновозможность, выделить нужные исходы и объяснить ответ словами. Мы не будем угадывать, что произойдёт завтра, по трём вчерашним наблюдениям. Вероятность описывает модель опыта, а не обещает исход отдельного повторения.

Небольшой словарь и арифметическая опора

Исход — полный результат выбранного опыта. Если вытягивают два жетона по очереди, исход удобно записывать парой: сначала такой-то, затем такой-то. Событие — набор исходов, которые подходят под вопрос. Например, «оба жетона мятные» обычно объединяет несколько разных пар отдельных жетонов.

Запись $3/8$ означает три восьмых. Чтобы получить процент, умножьте дробь на 100: $3/8 = 0,375 = 37,5\%$. Если дробь не даёт короткую десятичную запись, оставьте её точной. В решениях дробь — основной ответ; округление не должно менять сравнение вероятностей.

Дробь сокращают, деля числитель и знаменатель на одно и то же ненулевое число: $6/16 = 3/8$. При умножении перемножают числители и знаменатели: $(3/5) \times (2/4) = 6/20 = 3/10$. Для сложения сначала нужен общий знаменатель: $1/4 + 1/2 = 1/4 + 2/4 = 3/4$. Если эти действия пока трудны, полезно повторить их перед задачами.

Когда все отдельные исходы равновозможны, вероятность события равна числу подходящих исходов, делённому на число всех исходов. Но наличие двух названий, например «мятный» и «серый», ещё не означает шанс $1/2$ для каждого цвета. Три мятных жетона и пять серых — восемь отдельных

исходов, а не два равновозможных цвета.

Запись $P(A)$ читается как «вероятность события A », $P(A|B)$ — как «вероятность A при условии, что B произошло». Вертикальная черта не обозначает деление. Конкретная формула для такого пересчёта будет разобрана в задачах. В скобках (a, b) порядок важен, если a относится к первому выбору, а b — ко второму.

Как работать с двумя задачами в каждой модели

Всего здесь сорок задач: двадцать основных и двадцать дополнительных упражнений. Глава сначала вводит один приём и задаёт основной опыт. Попробуйте записать модель до открытия подсказки. Если ход не находится, прочитайте первую подсказку; вторая подводит ближе к вычислению. Обе подсказки и решения находятся отдельно, чтобы ответ не был виден сразу после условия.

Затем решите дополнительное упражнение. Его данные полностью указаны: не переносите количество жетонов или способ выбора из основной задачи по памяти. Иногда изменяется только число предметов, иногда — существенная деталь опыта. Полное решение упражнения находится в той же ответной главе после разбора основной задачи.

Сравнивайте с ключом не только последнюю дробь. Правильное число может получиться из двух ошибок, которые случайно компенсировались. Проверьте, какие исходы вы считали, где использовали равные шансы, учли ли порядок и не пересчитали ли один вариант дважды. Если ваш способ другой, он допустим, когда описывает тот же опыт и не теряет исходы.

Для занятий достаточно бумаги и карандаша; калькулятор необязателен. Программный код для решения не нужен.

Внутренние ссылки ведут к подсказкам, решениям и обратно. Если конкретная читалка не поддерживает переходы, используйте оглавление и совпадающие номера глав и ответов.

Карта книги

Модели 1–4 учат выбирать исходы: отдельные предметы, двухступенчатый выбор, упорядоченные пары и объединение событий. Модели 5–10 посвящены последовательному извлечению, дополнению события, строкам, перестановкам и выбору группы без учёта порядка. Все нужные приёмы подсчёта объясняются на малых числах.

Модели 11–15 показывают, что делает новая информация: меняется знаменатель, направление вопроса имеет значение, а независимость нельзя определять по бытовому впечатлению. Модели 16–19 переходят от события к числу — максимуму, количеству меток, наличию соседней пары и числу проверок до остановки. Модель 20 отделяет наблюдаемую частоту от вероятности, заданной в условии.

Главы связаны последовательностью идей, но не выдуманном сюжетом на сто страниц. Если ошибка повторяется, вернитесь к модели, где впервые появился нужный приём. Сложность последних глав связана главным образом с выбором пространства исходов, а не с большими вычислениями.

Двадцать моделей: условия и упражнения

Модель 1. Один выбор: что считать исходом

Приём: Равновероятные отдельные предметы и событие как набор исходов.

Разберём идею

Вероятностную задачу удобно начинать не с дроби, а с вопроса: какой результат одного опыта мы будем записывать? Если выбирают один жетон, подробный результат — именно этот жетон, а не только его цвет. Несколько разных жетонов могут давать один и тот же цвет. Поэтому два возможных названия цвета ещё не означают, что у каждого цвета вероятность $1/2$. Размеры групп становятся видны только после выбора достаточно подробных исходов.

Для конечного набора равновероятных исходов вероятность события равна числу подходящих исходов, делённому на общее число исходов. Равновероятность здесь является

условием модели: каждый отдельный предмет имеет одинаковый шанс быть выбранным. Событие объединяет все результаты, при которых выполнено интересующее нас условие. Сначала обоснуйте равные шансы отдельных исходов, затем считайте их; одна лишь возможность перечислить результаты ещё не даёт права делить их количества.

Основная задача 1

В непрозрачном мешочке лежат 8 одинаковых по размеру и форме жетонов. У каждого свой номер от 1 до 8, поэтому жетоны различимы. Жетоны 1, 2 и 3 мятного цвета, остальные пять — серые. По условию один жетон выбирают равномерно: вероятность выбора каждого из восьми номеров равна $1/8$. После выбора опыт заканчивается.

Какова вероятность того, что выбранный жетон окажется мятным?

[Подсказки к основной задаче 1](#)

[Решение основной задачи 1](#)

Самостоятельное упражнение 1

В другом мешочке 12 одинаковых по форме, но индивидуально пронумерованных жетонов. Пять жетонов фиолетовые, остальные семь белые. Один из двенадцати номеров

выбирают равномерно и извлекают соответствующий жетон.
Найдите вероятность фиолетового цвета.

Решение упражнения 1

Модель 2. Два уровня выбора: равные папки не равны файлам

Приём: Дерево выбора и вероятности путей при неодинаковых размерах групп.

Разберём идею

Случайный выбор нередко устроен в несколько шагов: сначала выбирают группу, затем предмет внутри неё. Даже если каждый шаг равномерный среди доступных на нём вариантов, итоговые предметы не обязательно равновероятны. Маленькая группа делит свою долю вероятности между немногими предметами, а большая — между многими. Поэтому слова «выбрали случайный файл» недостаточно: нужно знать весь протокол, ведущий к файлу.

Путь из двух шагов получает вероятность первого шага, умноженную на вероятность второго при уже выбранной ветви. Здесь не требуется называть шаги независимыми: набор доступных файлов как раз зависит от папки. Можно представить, что половину единичной полосы отдали одной папке, половину другой, а затем каждую половину разрезали на столько равных частей, сколько файлов в соответствующей папке. Длины конечных частей и будут вероятностями фай-

ЛОВ.

Основная задача 2

В папке А находятся два разных файла A1 и A2. В папке В находятся шесть других разных файлов В1, В2, В3, В4, В5 и В6. Сначала равномерно выбирают одну из двух папок. Затем, только внутри выбранной папки, равномерно выбирают один файл. Файл A1 заранее объявлен целевым.

Для сравнения рассмотрим другой протокол: все восемь файлов помещают в один список и равномерно выбирают один элемент этого списка.

Какова вероятность выбрать A1 в первом протоколе? Какова она при равномерном выборе из общего списка?

[Подсказки к основной задаче 2](#)

[Решение основной задачи 2](#)

Самостоятельное упражнение 2

В папках С, D и E лежат соответственно 3, 5 и 4 индивидуально различимых файла; общих файлов у папок нет. Сначала равномерно выбирают одну из трёх папок, затем равномерно один файл в ней. Найдите вероятность заранее указанного файла D2. Сравните её с вероятностью D2 при равномерном выборе из общего списка всех файлов.

Решение упражнения 2

Модель 3. Два числа: порядок важен даже для суммы

Приём: Декартово произведение исходов независимых опытов.

Разберём идею

Когда опыт состоит из первого и второго выбора, естественный подробный исход — упорядоченная пара. В паре (2, 4) сначала получено 2, затем 4; в паре (4, 2) последовательность другая. Даже если вопрос касается только суммы и эти пары дают одинаковое значение, объединять их до подсчёта опасно. Одна сумма может получаться несколькими способами, другая — единственным, поэтому сами суммы обычно не равновероятны.

Независимость означает, что знание результата первого выбора не меняет распределение второго. Если каждый раз равномерно выбирают из четырёх чисел и выборы независимы, у любого первого числа есть четыре одинаково возможных продолжения. Всего получается 4×4 пар, каждая с вероятностью $1/4 \times 1/4$. Такое пространство удобно рисовать таблицей: строки задают первое число, столбцы второе, а каждая клетка соответствует одному исходу.

Основная задача 3

Есть два отдельных набора по четыре одинаковые карточки с числами 1, 2, 3 и 4. Из каждого набора равномерно выбирают одну карточку. Выборы независимы по условию. Записывают сначала число из первого набора, затем число из второго; карточки после опыта ни на что больше не влияют.

Какова вероятность того, что сумма двух выбранных чисел не меньше 6?

[Подсказки к основной задаче 3](#)

[Решение основной задачи 3](#)

Самостоятельное упражнение 3

Из двух отдельных наборов карточек 1, 2, 3, 4, 5 независимо и равномерно выбирают по одной карточке. Первая и вторая позиции различаются. Найдите вероятность того, что сумма выбранных чисел не больше 4.

[Решение упражнения 3](#)

Модель 4. Слово «или»: как не посчитать пересечение дважды

Приём: Объединение двух событий и включающее «или».

Разберём идею

В математическом условии «выполнено А или В» обычно означает: выполнено хотя бы одно из двух условий, а возможно, оба сразу. Такое «или» называют включающим. События могут пересекаться — иметь общие исходы. Если сначала посчитать все исходы А, затем все исходы В и сложить количества, общая часть будет учтена дважды, хотя в объединении каждый исход должен находиться ровно один раз.

Для двух событий исправление простое: из суммы их вероятностей вычитают вероятность пересечения. При равновероятных исходах то же действие можно выполнить с количествами: число в А плюс число в В минус число в обоих событиях. Есть и другой способ — сразу составить единый список без повторов. Два метода полезно сравнить: согласие результатов помогает обнаружить пропущенную границу, например число, которое равно порогу, а не превосходит его.

Основная задача 4

На столе лежат 12 одинаковых с обратной стороны карточек с разными числами от 1 до 12. Выбирают одну карточку равномерно среди всех двенадцати. Под словом «или» в этой задаче понимается включающее «или»: карточка подходит, если выполнено хотя бы одно условие, в том числе оба сразу.

Какова вероятность выбрать чётное число или число, строго большее 9?

[Подсказки к основной задаче 4](#)

[Решение основной задачи 4](#)

Самостоятельное упражнение 4

Одну из 15 карточек с разными числами от 1 до 15 выбирают равномерно. Карточка подходит, если её число делится на 3 или не меньше 13; «или» включающее. Найдите вероятность подходящей карточки.

[Решение упражнения 4](#)

Модель 5. Возврат жетона: когда второй шанс меняется

Приём: Независимые выборы с возвращением и зависимые выборы без возвращения.

Разберём идею

Два внешне похожих опыта могут различаться одним действием между выборами: возвращают ли первый предмет обратно. При возвращении состав набора восстанавливается; если новый равномерный выбор независим от предыдущего, вероятность каждого цвета на втором шаге остаётся прежней. Само слово «перемешали» не заменяет предположение о независимости: протокол должен исключать намеренную связь следующего результата с предыдущим.

Без возвращения второй выбор происходит из уменьшившегося набора. Для события «оба предмета нужного цвета» удобно сначала предположить, что первый успех уже случился, и пересчитать оставшиеся предметы. Вероятность всего пути равна вероятности первого успеха, умноженной на вероятность второго при первом успехе. Это правило работает и для зависимых выборов, если второй множитель действительно относится к изменившемуся набору.

Основная задача 5

В мешочке пять индивидуально различных одинаковых по форме жетонов: три мятных M1, M2, M3 и два серых S1, S2. В протоколе R сначала равномерно выбирают жетон, записывают цвет, возвращают жетон, а затем выполняют новый независимый равномерный выбор из всех пяти жетонов.

В протоколе N первый жетон также выбирают равномерно, но не возвращают. Второй выбирают равномерно из четырёх оставшихся. В обоих протоколах записывают цвета первого и второго выбора в этом порядке.

Какова вероятность двух мятных жетонов в протоколе R и в протоколе N?

[Подсказки к основной задаче 5](#)

[Решение основной задачи 5](#)

Самостоятельное упражнение 5

В мешочке семь индивидуально различных жетонов одинаковой формы: четыре зелёных и три белых. Дважды выбирают равномерно. Найдите вероятность двух зелёных: а) первый жетон возвращают и выполняют независимый новый выбор; б) первый не возвращают, второй выбирают равномерно из оставшихся.

Решение упражнения 5

Модель 6. Хотя бы один: посчитать то, чего не случилось

Приём: Дополнение события и равновероятные неупорядоченные наборы.

Разберём идею

Событие «хотя бы один предмет нужного типа» может включать несколько случаев: один, два, три и так далее. Иногда легче описать противоположное событие: ни одного предмета нужного типа. Эти два события несовместимы и вместе охватывают все исходы, поэтому их вероятности в сумме равны 1. Найдя вероятность отсутствия нужных предметов, получаем искомую вычитанием из 1. Это называется переходом к дополнению.

Если выбирают сразу набор без порядка, результатом является подмножество различных предметов. Набор из предметов A, B, C не меняется от того, в каком порядке перечислены его элементы. Число таких наборов можно найти через упорядоченные выборы: сначала посчитать все последовательности без повторения, затем разделить на число порядков одного и того же набора. Деление допустимо потому, что у каждого набора одинаковое число перестановок, а не

потому, что порядок вообще не важен во всех задачах.

Основная задача 6

Есть шесть индивидуально пронумерованных одинаковых по форме жетонов. На двух нарисована звезда, на четырёх нет рисунка. Равномерно выбирают трёхэлементное подмножество: каждый набор из трёх разных жетонов имеет одинаковую вероятность. Жетоны не возвращают; порядок перечисления выбранных номеров не считается новым результатом.

Какова вероятность того, что в выбранном наборе будет хотя бы один жетон со звездой?

[Подсказки к основной задаче 6](#)

[Решение основной задачи 6](#)

Самостоятельное упражнение 6

Из восьми индивидуально различимых жетонов три со звездой, пять без рисунка. Равномерно выбирают подмножество из трёх разных жетонов; порядок не учитывают и повторный выбор жетона невозможен. Найдите вероятность хотя бы одной звезды.

[Решение упражнения 6](#)

Модель 7. Строка из символов: правило произведения

Приём: Последовательный подсчёт строк и запрет повторений.

Разберём идею

Строка — это последовательность символов в отдельных позициях. Перестановка символов обычно создаёт другую строку: 012 и 210 различаются. Если на каждой из трёх позиций разрешены четыре символа, то число всех строк равно $4 \times 4 \times 4$: к каждому выбору первой позиции можно добавить четыре варианта второй, а к каждой полученной паре ещё четыре варианта третьей. Это правило произведения для последовательного построения объектов.

Условие «без повторяющихся символов» меняет число доступных продолжений при построении подходящих строк. После первого символа один вариант занят, после второго заняты два. При этом пространство всех случайно выбираемых строк остаётся прежним: запрет повторений является событием, которое мы проверяем, а не новой инструкцией генератору. Если сразу заставить генератор избегать повторов, получится другой опыт, в котором искомое условие вы-

полнено автоматически.

Основная задача 7

Для бумажной метки выбирают строку длины 3 из алфавита 0, 1, 2, 3. Каждый из 64 возможных вариантов строки равновероятен. Это можно реализовать тремя независимыми равномерными выборами символа из четырёх. Ноль на первом месте разрешён, а одинаковые символы в разных позициях при выборе не запрещены.

Какова вероятность того, что все три символа выбранной строки окажутся различными?

[Подсказки к основной задаче 7](#)

[Решение основной задачи 7](#)

Самостоятельное упражнение 7

Равномерно выбирают одну из всех строк длины 4 над алфавитом 0, 1, 2, 3, 4. Эквивалентный протокол — четыре независимых равномерных выбора символа; начальный ноль и повторы разрешены. Найдите вероятность того, что четыре символа строки попарно различны.

[Решение упражнения 7](#)

Модель 8. Две карточки рядом: собираем блок

Приём: Перестановки различных объектов и метод блока.

Разберём идею

Перестановка — это размещение всех различных предметов в ряд, каждый ровно один раз. Для пяти предметов число порядков равно $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$: после заполнения каждой позиции вариантов на следующую становится на один меньше. Здесь различимость обязательна. Если две карточки несут одинаковую надпись, но их считают разными экземплярами, это одна модель; если экземпляры не различают, пространство записываемых результатов будет другим.

Когда два определённых предмета должны стоять рядом, их удобно временно склеить в блок. Тогда блок перемещается в ряду как один объект вместе с остальными предметами. После размещения объектов нужно учесть внутренний порядок пары: АВ и ВА дают разные ряды, если оба разрешены. Метод работает без двойного счёта, когда каждый подходящий ряд можно единственным образом сжать обратно, заменив соседнюю нужную пару одним блоком.

Основная задача 8

Пять разных карточек А, В, С, D и Е выкладывают в один горизонтальный ряд. Каждый возможный порядок пяти карточек равновероятен. Каждая карточка используется ровно один раз. Соседними считаются карточки на двух последовательных местах; первый и последний края ряда между собой не соединены.

Какова вероятность, что карточки А и В окажутся рядом в любом порядке — АВ или ВА?

[Подсказки к основной задаче 8](#)

[Решение основной задачи 8](#)

Самостоятельное упражнение 8

Шесть разных карточек А, В, С, D, Е и F равномерно переставляют в линейный ряд. Все карточки используются один раз, края не соседствуют. Найдите вероятность соседства А и В, если допустимы и АВ, и ВА.

[Решение упражнения 8](#)

Модель 9. Пара участников: выбрать по одному из двух групп

Приём: Неупорядоченная выборка и произведение способов из непересекающихся групп.

Разберём идею

В задачах о паре участников важно уточнить, различаются ли роли. Если выбирают двух человек для совместной работы без назначения первого и второго, результатом является неупорядоченная пара. Пара Ира–Лев совпадает с парой Лев–Ира. При подсчёте через последовательный выбор каждую такую пару получают дважды, поэтому общее число пар из шести разных людей равно $6 \times 5 / 2$, а не 6×5 .

Для смешанной пары, в которой один человек из первой группы и один из второй, можно выбирать участников непосредственно по группам. Каждый выбор первого типа соединяется с каждым выбором второго. Делить это произведение на 2 не нужно: названия групп уже различают два места построения, и одна смешанная пара имеет ровно одного представителя каждой группы. Важно, чтобы группы не пересекались; иначе один человек мог бы ошибочно занять обе позиции.

Основная задача 9

Для работы над бумажным макетом есть шесть разных участников: четверо уже делали такой макет, двое пробуют впервые. Эти группы не пересекаются и вместе включают всех участников. Из шести равномерно выбирают двух разных людей, без назначения ролей: каждая неупорядоченная пара одинаково вероятна. Умения не влияют на процедуру выбора.

Какова вероятность, что в выбранной паре будет ровно один опытный участник и ровно один новичок?

[Подсказки к основной задаче 9](#)

[Решение основной задачи 9](#)

Самостоятельное упражнение 9

В мастерской семь разных участников: трое уже работали с трафаретами, четверо впервые пришли на занятие. Группы не пересекаются. Равномерно выбирают неупорядоченную пару разных людей без назначения ролей. Найдите вероятность того, что в ней будет один опытный участник и один новичок.

[Решение упражнения 9](#)

Модель 10. Ровно два отмеченных: состав выборки

Приём: Точное число предметов заданного типа в выборке без возвращения.

Разберём идею

Слово «ровно» задаёт точный состав выборки. Если в наборе из трёх жетонов нужно ровно два отмеченных, третий обязан быть неотмеченным. Нельзя посчитать только способы выбрать два отмеченных и забыть про оставшуюся часть набора: разные дополнения дают разные исходы. Нельзя и разрешить в дополнении ещё один отмеченный жетон, иначе в событие попадёт набор с тремя отметками.

Такой подсчёт удобно разделить на два независимых в комбинаторном смысле решения: какой набор взять из отмеченных и какой из обычных. Это не утверждение о вероятностной независимости извлечений; без возвращения они зависимы. Здесь правило произведения лишь говорит, что любой разрешённый набор первой группы можно соединить с любым разрешённым набором второй. Затем полученное число подходящих наборов сравнивают с числом всех равновероятных наборов нужного размера.

Основная задача 10

Есть восемь одинаковых по форме, индивидуально пронумерованных жетонов: три отмечены точкой, пять без отметки. Равномерно выбирают трёхэлементное подмножество из восьми жетонов. Каждый набор из трёх разных номеров одинаково вероятен. Возвращения и повторного включения одного жетона нет; порядок номеров в наборе не учитывается.

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «Литрес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на Литрес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.