

Дроби, пропорции и проценты

16 практических разборов

32 упражнения с полными решениями

ОДНО ЦЕЛОЕ — РАЗНЫЕ ЗАПИСИ



$$\frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$$

Условие · Решение · Обратная проверка

ГЛЕБ ЗАЙЦЕВ

Глеб Зайцев

Дроби, пропорции и проценты. 16 практических разборов

<https://litres.ru/74417778>

SelfPub; 2026

Аннотация

Что считать целым? Почему последовательные изменения в процентах не складываются, а меньшая цена упаковки не означает меньшую цену листа? Этот практикум помогает перевести короткое условие в осмысленное вычисление. Внутри — 16 пошаговых разборов и 32 самостоятельных упражнения с полными решениями: обыкновенные и десятичные дроби, единицы, отношения, прямая и обратная пропорциональность, проценты и округление. В каждом разборе есть типичная ошибка и способ проверить ответ. Для самостоятельного повторения школьной арифметики; нужны навыки действий с целыми числами. Все ситуации вымышлены. Это не полный школьный курс, не подготовка ко всему экзамену и не руководство по финансовым решениям.

Содержание

Перед первым вычислением	4
Для кого этот практикум	4
Как читать записи	6
Рабочий порядок	8
Точность и условия модели	9
Выбрать разбор	10
Модели и самостоятельные упражнения	11
Разбор 1. Что принято за целое	11
Разбор 2. Складываем доли одного целого	15
Разбор 3. Остаток длины и смешанные числа	19
Разбор 4. Доля от уже выбранной части	23
Разбор 5. Сколько одинаковых порций помещается	27
Конец ознакомительного фрагмента.	28

Глеб Зайцев
Дроби, пропорции
и проценты. 16
практических разборов
Перед первым вычислением
Для кого этот практикум

Если действия с целыми числами вам знакомы, но в задаче с дробью или процентом трудно выбрать первое действие, начните отсюда. Мы будем не ускорять счёт любой ценой, а выяснять, что именно означает число. Произведение может быть вычислено безошибочно и всё же отвечать не на тот вопрос: например, давать размер скидки вместо новой цены.

Книга рассчитана на самостоятельное повторение. Здесь нет всей школьной математики, экзаменационных вариантов или обещания считать быстрее после определённого числа занятий. Первые разборы объясняют дроби и отношения; поздние используют эти идеи для процентов. Если сокращение дроби ещё вызывает сомнение, лучше вернуться к ран-

нему примеру, чем заучивать позднюю формулу без её основания.

Все числа, цены, заказы и предметы придуманы для учебных задач. Это не сведения о реальных товарах и не рекомендации что-либо купить. Условные машины работают с прямо заданной постоянной производительностью: из таких моделей нельзя выводить реальные нормы для людей. Медицинские дозировки, налоги, кредиты и инвестиции здесь не рассматриваются.

Как читать записи

В записи $3/8$ верхнее по смыслу число 3 называется числителем, нижнее 8 — знаменателем. Косая черта означает деление: три восьмых. Знаменатель не равен нулю. Если речь идёт о части предмета, он показывает, на сколько равных частей разделено выбранное целое, а числитель — сколько таких частей взято. Само целое нужно назвать отдельно.

Смешанное число вроде $1\frac{2}{5}$ означает одну целую единицу и ещё две пятых: это сумма $1 + 2/5$, а не произведение. В формулах, где соседство могло бы запутать, мы пишем скобки или неправильную дробь. Десятичная запятая отделяет доли единицы: 0,25 — двадцать пять сотых. Запись 25% тоже обозначает двадцать пять сотых, но всегда по отношению к указанной базе.

Знаки $\times$ и $\div$ означают умножение и деление; скобки показывают, что вычисляется вместе. Равенство «=» используется для точного совпадения, а « $\approx$ » — для округлённого значения. Простые дроби оставлены в строке, без мелких надстрочных цифр и внешних формул. Если программа чтения переносит формулу, читайте её до конца предложения.

Килограмм содержит 1000 граммов, метр — 100 сантиметров. Переводить единицы нужно до сравнения, а не после него. Цена в рублях за упаковку и цена в рублях за килограмм — разные величины. Рядом с окончательным ответом

обязательно оставляйте единицу: число без неё часто скрывает ошибку выбора действия.

Рабочий порядок

Сначала перепишите вопрос своими словами. Вы ищете часть, целое, число порций, долю в процентах или минимальное целое число упаковок? Затем выпишите известные величины с единицами. У дроби назовите целое, у процента — базу, у отношения — порядок частей. Эти короткие записи важнее длинной цепочки вычислений.

В каждом разборе сначала дан основной пример, затем показано решение и распространённая ошибка. После него идут два самостоятельных упражнения с другими числами. Попробуйте решить их до перехода к ответам. В конце книги приведены не только итоговые числа, но и ход решения, единицы и проверка. Альтернативный правильный способ не обязан совпадать с нашим по порядку действий.

Проверка должна по возможности делать что-то другое: восстановить исходную сумму, подставить найденное целое, вернуть новую величину к прежней или сравнить ответ с границами. Повторить на калькуляторе ту же неверно выбранную формулу — не значит проверить модель. Калькулятор полезен для арифметики, но не выбирает за вас смысл условия.

Точность и условия модели

В задачах исходные числа считаются точными, если отдельно не сказано об округлении. Это учебное соглашение: реальная длина или масса измеряется с ограниченной точностью. Не добавляйте в реальном отчёте лишние десятичные знаки только потому, что их показал калькулятор. Внутри решения сохраняйте точную дробь, пока вопрос не потребует округления.

Нужное направление округления зависит от вопроса. Ближайшее целое к точному частному и минимальное число целых упаковок, которых хватит для заказа, — не один и тот же результат. В последнем разборе эта разница показана отдельно. Условие о делимости, одинаковой производительности или отсутствии потерь не следует переносить за пределы учебной задачи без проверки.

Выбрать разбор

1. Что принято за целое
2. Складываем доли одного целого
3. Остаток длины и смешанные числа
4. Доля от уже выбранной части
5. Сколько одинаковых порций помещается
6. Десятичная запись и единицы
7. Делим общее количество в отношении
8. Постоянный расход на одно изделие
9. Одинаковая работа: больше станков — меньше времени
10. Дешевле упаковка или дешевле одна единица?
11. Процент от целого: сначала назвать базу
12. Известна часть: восстановить сто процентов
13. Сколько процентов: знаменатель задаёт вопрос
14. Изменить на процент и вернуться назад
15. Два изменения: новая база на втором шаге
16. Хватит ли целых упаковок?

Модели и самостоятельные упражнения

Разбор 1. Что принято за целое

Задача: Отличать долю набора от числа предметов и находить часть через одну равную долю.

Идея вычисления

Дробь описывает не самостоятельное количество предметов, а отношение части к выбранному целому. В записи $\frac{5}{8}$ нижнее число, знаменатель, сообщает: целое разделено на 8 равных частей. Верхнее число, числитель, сообщает: взяты 5 таких частей. Прежде чем считать, полезно закончить фразу «здесь за целое принят весь...» и назвать набор полностью.

Если известно число предметов в целом, сначала найдите количество в одной равной части: разделите общее число на знаменатель. Затем умножьте результат на числитель. Например, выражение «пять восьмых набора» не означает ни 5 предметов, ни 8 предметов. Эти числа описывают деление набора, а число предметов получается только после учёта его размера.

В дроби равными должны быть именно доли целого. Пять конвертов из восьми содержат $\frac{5}{8}$ всех карточек лишь тогда, когда в конвертах поровну карточек. Без этого условия можно говорить о доле конвертов, но не о доле их содержимого. Всегда проверяйте, что вы считаете: предметы, группы предметов или долю набора. У этих ответов разные смыслы.

Основной пример

В наборе 72 бумажных жетона. Синие жетоны составляют $\frac{5}{8}$ всего набора. Остальные жетоны другого цвета. Сколько синих жетонов в наборе? Жетоны считаются отдельными предметами, а за целое принят весь набор из 72 жетонов.

Решение по шагам

1. Сначала назовём целое: это 72 жетона, а не число 8. Знаменатель дроби предлагает мысленно разделить именно этот набор на 8 одинаковых по числу жетонов частей.
2. Найдём размер одной восьмой: $72 \div 8 = 9$ жетонов. Число 9 здесь обозначает количество предметов в одной части, а $\frac{1}{8}$ — долю всего набора.
3. Синим жетонам соответствуют 5 таких частей. Поэтому $9 \times 5 = 45$ жетонов. В одном выражении решение записывается так: $72 \div 8 \times 5 = 45$.

Ответ: В наборе 45 синих жетонов.

Проверка: Оставшиеся 3 восьмых должны содержать $3 \times 9 = 27$ жетонов. Вместе получаем $45 + 27 = 72$ — исходное целое. Кроме того, 45 меньше 72: доля $5/8$ действительно меньше целого.

Типичная ошибка — неверное рассуждение

Синих жетонов 5, потому что числитель дроби равен 5.

Числитель считает выбранные равные доли, а не отдельные жетоны. В каждой доле здесь 9 жетонов. Если написать в ответе 5 жетонов, получится доля $5/72$ исходного набора, а не заданные $5/8$.

Условия применимости

Этот способ применим, когда названо целое и доли равны. Для набора отдельных предметов результат должен допускать целое число предметов; дробный результат требует пересмотреть условия, а не молча округлить количество.

Упражнение 1.1

На карточке нарисованы 63 одинаковые клетки. Закрашены $4/7$ всех клеток. Сколько клеток закрашено? За целое

приняты все клетки этой карточки.

[Проверить упражнение 1.1](#)

Упражнение 1.2

Весь набор из 60 карточек разложен поровну в 10 коробок. У 7 коробок есть метка. Какая доля всех карточек лежит в отмеченных коробках и сколько это карточек? Ни одна карточка не лежит вне коробок.

[Проверить упражнение 1.2](#)

[К списку разборов](#)

Разбор 2. Складываем доли одного целого

Задача: Приводить дроби к общей равной доле и складывать только сопоставимые количества.

Идея вычисления

Равные дроби по-разному называют одну величину. Если каждую четверть разделить ещё на 3 равные части, то четверть превратится в 3 двенадцатых: $1/4 = 3/12$. Мы не увеличили закрашенную площадь или длину; изменился только размер доли, которой её считаем. Поэтому при таком преобразовании числитель и знаменатель умножают на одно и то же число.

Чтобы сложить дроби с разными знаменателями, удобно выразить обе величины одинаковыми долями. Общий знаменатель должен делиться на оба исходных знаменателя. После преобразования складываются количества одинаковых долей, то есть числители; название доли, то есть знаменатель, остаётся прежним. Выбор наименьшего общего знаменателя упрощает счёт, но не меняет ответ.

До вычисления нужно проверить смысл сложения. Доли должны относиться к одному целому либо обозначать вели-

чины в одной единице: например, доли одного листа или части метра. Если считаются занятые области, они не должны перекрываться, иначе общая часть будет посчитана дважды. Доля маленького листа и доля большого листа не становятся долями одного листа от простого сложения чисел.

Основной пример

Весь лист без полей разделён на 72 одинаковые клетки. Красным закрашена $\frac{1}{4}$ всех клеток, синим — $\frac{1}{6}$ всех клеток. Ни одна клетка не окрашена сразу в два цвета. Какую долю листа занимают закрашенные клетки и сколько их? Целое для обеих дробей — этот же лист.

Решение по шагам

1. Обе доли относятся к одному листу, а цвета не пересекаются, поэтому их можно сложить. Выберем общую долю: число 12 делится и на 4, и на 6.

2. Перепишем первую дробь, умножив обе её части на 3: $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$. Во второй умножим обе части на 2: $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$. Размеры окрашенных областей от этого не изменились.

3. Теперь считаем одинаковые двенадцатые: $\frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$ листа. Знаменатель остаётся 12, потому что доли всё ещё двенадцатые.

4. В одной двенадцатой $72 \div 12 = 6$ клеток. Во всех пяти — $6 \times 5 = 30$ клеток. Получены и доля листа, и число закрашенных клеток.

Ответ: Закрашено $5/12$ листа, или 30 клеток.

Проверка: Посчитаем цвета отдельно, без общего знаменателя: $72 \div 4 = 18$ красных клеток и $72 \div 6 = 12$ синих. Их сумма $18 + 12 = 30$ подтверждает результат; отношение $30/72$ после сокращения на 6 равно $5/12$.

Типичная ошибка — неверное рассуждение

$1/4 + 1/6 = 2/10$: нужно сложить и верхние, и нижние числа.

Четверть и шестая часть имеют разный размер. Сложение знаменателей не переводит их в одинаковые доли, а произвольно создаёт десятые. Кроме того, $2/10$ меньше одной четверти, хотя к четверти добавляли положительную величину.

Условия применимости

Общий знаменатель решает вычислительную задачу, но не исправляет разные исходные целые, несовместимые единицы или двойной подсчёт. Сначала установите, какие реальные количества разрешено складывать, и лишь затем преобразуйте дроби.

Упражнение 2.1

По условию учебной задачи длина одного отрезка ленты равна точно $\frac{2}{5}$ м, другого — точно $\frac{1}{4}$ м. Их положили последовательно без промежутка и наложения. Какова общая длина в метрах?

[Проверить упражнение 2.1](#)

Упражнение 2.2

В наборе 60 фишек. Треугольные фишки составляют $\frac{1}{3}$ всего набора, квадратные — $\frac{3}{10}$ всего набора. Остальные имеют другую форму; каждая фишка относится ровно к одной группе. Найдите общую долю и число треугольных и квадратных фишек.

[Проверить упражнение 2.2](#)

[К списку разборов](#)

Разбор 3. Остаток длины и смешанные числа

Задача: Вычитать смешанные числа и понимать, когда одну целую единицу нужно раздробить.

Идея вычисления

Смешанное число соединяет целое число и правильную дробь: запись $5 \frac{1}{4}$ м означает 5 м + $\frac{1}{4}$ м. Пробел в такой записи не является знаком умножения. Для вычитания полезно сначала назвать единицу и убедиться, что исходная длина и отрезанная часть выражены в одинаковых единицах. Остаток получается как исходная длина минус использованная.

Надёжный способ работы со смешанным числом — перевести всё количество в дробь. Каждая целая единица содержит столько долей, сколько указано в знаменателе: $5 \frac{1}{4} = (5 \times 4 + 1)/4 = 21/4$. После такого перевода остаются обычные дроби. Приведите их к общему знаменателю и вычитайте числители, сохранив размер общей доли.

Можно вычитать и по частям, но дробной части уменьшаемого иногда не хватает. Тогда одну целую единицу представляют нужным числом долей: например, вместо $5 \frac{3}{12}$ пишут $4 \frac{15}{12}$. Длина при этом та же. Нельзя отдельно взять по-

положительную разность целых частей и положительную разность дробных частей, меняя порядок вычитания: это нарушит исходное равенство.

Основной пример

В учебной модели длина ленты равна точно $5 \frac{1}{4}$ м. От неё отрезали $2 \frac{5}{6}$ м; потери на разрез по условию отсутствуют. Какая длина осталась? Ответ запишите смешанным числом в метрах.

Решение по шагам

1. Обе длины указаны в метрах, а отрезанная часть меньше всей ленты. Искомое выражение: $5 \frac{1}{4} - 2 \frac{5}{6}$. Здесь из исходной длины вычитается вся отрезанная длина.

2. Переведём смешанные числа в дроби: $5 \frac{1}{4} = (5 \times 4 + 1)/4 = 21/4$; $2 \frac{5}{6} = (2 \times 6 + 5)/6 = 17/6$. Числители теперь считают четверти и шестые метра.

3. Выразим обе длины в двенадцатых: $21/4 = 63/12$, а $17/6 = 34/12$. Остаток равен $63/12 - 34/12 = 29/12$ м.

4. Выделим целые метры: в 29 двенадцатых содержатся 24 двенадцатых и ещё 5. Поскольку $24/12 = 2$, получаем $29/12 = 2 \frac{5}{12}$ м.

Ответ: Осталось $2 \frac{5}{12}$ м ленты.

Проверка: Восстановим исходную длину сложением: $2\frac{5}{12} + 2\frac{5}{6} = 2\frac{5}{12} + 2\frac{10}{12} = 4\frac{15}{12} = 5\frac{1}{4}$ м. Используемая часть и остаток действительно составляют всю ленту.

Типичная ошибка — неверное рассуждение

$5\frac{1}{4} - 2\frac{5}{6} = 3\frac{7}{12}$: из 5 вычитаем 2, а из большей дроби $\frac{5}{6}$ вычитаем меньшую $\frac{1}{4}$.

Дробные части нельзя переставлять ради положительного результата: нужно вычесть $\frac{5}{6}$ из $\frac{1}{4}$. После перевода в двенадцатые одной целой единицей дополняют $\frac{3}{12}$ до $\frac{15}{12}$, а целая часть уменьшаемого становится 4. Тогда ответ — $2\frac{5}{12}$, а не $3\frac{7}{12}$.

Условия применимости

Длины в этих задачах заданы точно, а потери исключены условием. При работе с измерениями точность результата ограничена точностью исходных данных. Если отрезанная длина больше исходной, отрицательное число укажет на невыполнимость такого разреза.

Упражнение 3.1

По условию длина бумажной полосы равна точно $3\frac{2}{5}$ м.

Для макета использовали $1\frac{3}{4}$ м. Потерь нет. Найдите оставшуюся длину и запишите её смешанным числом в метрах.

[Проверить упражнение 3.1](#)

Упражнение 3.2

В учебной модели шнур имеет длину точно $6\frac{1}{3}$ м. От него отделили кусок длиной $2\frac{7}{8}$ м без потери длины. Сколько метров осталось? Ответ выразите смешанным числом.

[Проверить упражнение 3.2](#)

[К списку разборов](#)

Разбор 4. Доля от уже выбранной части

Задача: Находить дробь от дроби и отслеживать смену промежуточного целого.

Идея вычисления

В условии «часть выбранных карточек» слово «выбранных» меняет основание сравнения. Первая дробь может относиться ко всему набору, а вторая — только к первой группе. Поэтому прежде чем считать, подпишите мысленно каждую дробь: «от всех» или «от выбранных». Одинаковая запись дроби не означает одинакового количества, если её целые имеют разные размеры.

Удобно идти по условию последовательно. Сначала найдите первую часть всего количества. Затем примите полученную группу за промежуточное целое и найдите нужную долю уже от неё. Важно не возвращаться ко всему исходному набору на втором шаге: его место занимает количество в первой группе. Такой ход делает видимым смысл каждого деления и умножения.

Тот же расчёт можно собрать в произведение дробей: долю первой группы умножают на долю нужных предметов

внутри неё. Числители перемножаются между собой, знаменатели — между собой. Результат описывает искомую долю исходного целого. Если обе доли положительны и меньше единицы, итоговая доля меньше каждой из них: выбирается часть уже уменьшенной группы.

Основной пример

Всего подготовлено 80 бумажных карточек. В конверты положили $\frac{3}{4}$ всех карточек. Метку получили $\frac{2}{5}$ карточек, лежащих в конвертах; карточки вне конвертов не отмечали. Сколько карточек с меткой и какую долю первоначального набора они составляют?

Решение по шагам

1. Первая дробь относится к 80 карточкам. В конвертах находятся $80 \div 4 \times 3 = 60$ карточек. Это промежуточная группа, внутри которой дальше выбирают отмеченные.
2. Дробь $\frac{2}{5}$ относится теперь к 60, а не к 80 карточкам. Число отмеченных равно $60 \div 5 \times 2 = 24$ карточки.
3. Чтобы получить долю от исходного набора напрямую, перемножим доли: $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$. Сокращение на 2 меняет запись, но не величину доли.
4. Свяжем оба ответа: $\frac{3}{10}$ от 80 — это $80 \div 10 \times 3 = 24$

карточки. Промежуточное целое было 60, а в итоговом ответе целое снова равно 80.

Ответ: Метку получили 24 карточки, или $3/10$ первоначального набора.

Проверка: Восстановим количество карточек в конвертах по отмеченным: $24 \div 2 \times 5 = 60$. Затем восстановим весь набор: $60 \div 3 \times 4 = 80$. Обе исходные доли согласуются с ответом.

Типичная ошибка — неверное рассуждение

Нужно найти $2/5$ от 80: получится 32 карточки с меткой.

Вторая дробь в условии относится не ко всем карточкам, а только к карточкам в конвертах. Число 32 получилось бы при другом условии — если бы метку получили $2/5$ всего набора. Подмена промежуточного целого меняет задачу.

Условия применимости

Перемножение здесь описывает вложенный выбор: вторая группа находится внутри первой. Если две дроби относятся к исходному набору независимо и ничего не сказано об их пересечении, произведение не определяет число предметов в обеих группах.

Упражнение 4.1

На учебном листе 90 одинаковых клеток. Рамкой обведены $\frac{2}{3}$ всех клеток. Из обведённых клеток $\frac{1}{6}$ помечена крестиком; вне рамки крестиков нет. Сколько клеток с крестиком и какая это доля всех клеток?

[Проверить упражнение 4.1](#)

Упражнение 4.2

В коробке было 112 неокрашенных бумажных дисков. Для оформления выбрали $\frac{5}{8}$ всех дисков. Из выбранных дисков $\frac{3}{7}$ покрасили в синий цвет; остальные диски синим не красили. Найдите число синих дисков и их долю от исходных 112.

[Проверить упражнение 4.2](#)

[К списку разборов](#)

Разбор 5. Сколько одинаковых порций помещается

Задача: Понимать деление на дробь как поиск числа порций заданного размера.

Идея вычисления

Вопрос «сколько порций по заданному количеству можно получить?» приводит к делению общего количества на размер одной порции. Здесь известен не набор равных долей всего запаса, а величина каждой отдельной порции. Например, длина в метрах делится на длину одного отрезка в метрах; результат показывает число отрезков, а не длину ещё одного куска.

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «Литрес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на Литрес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.