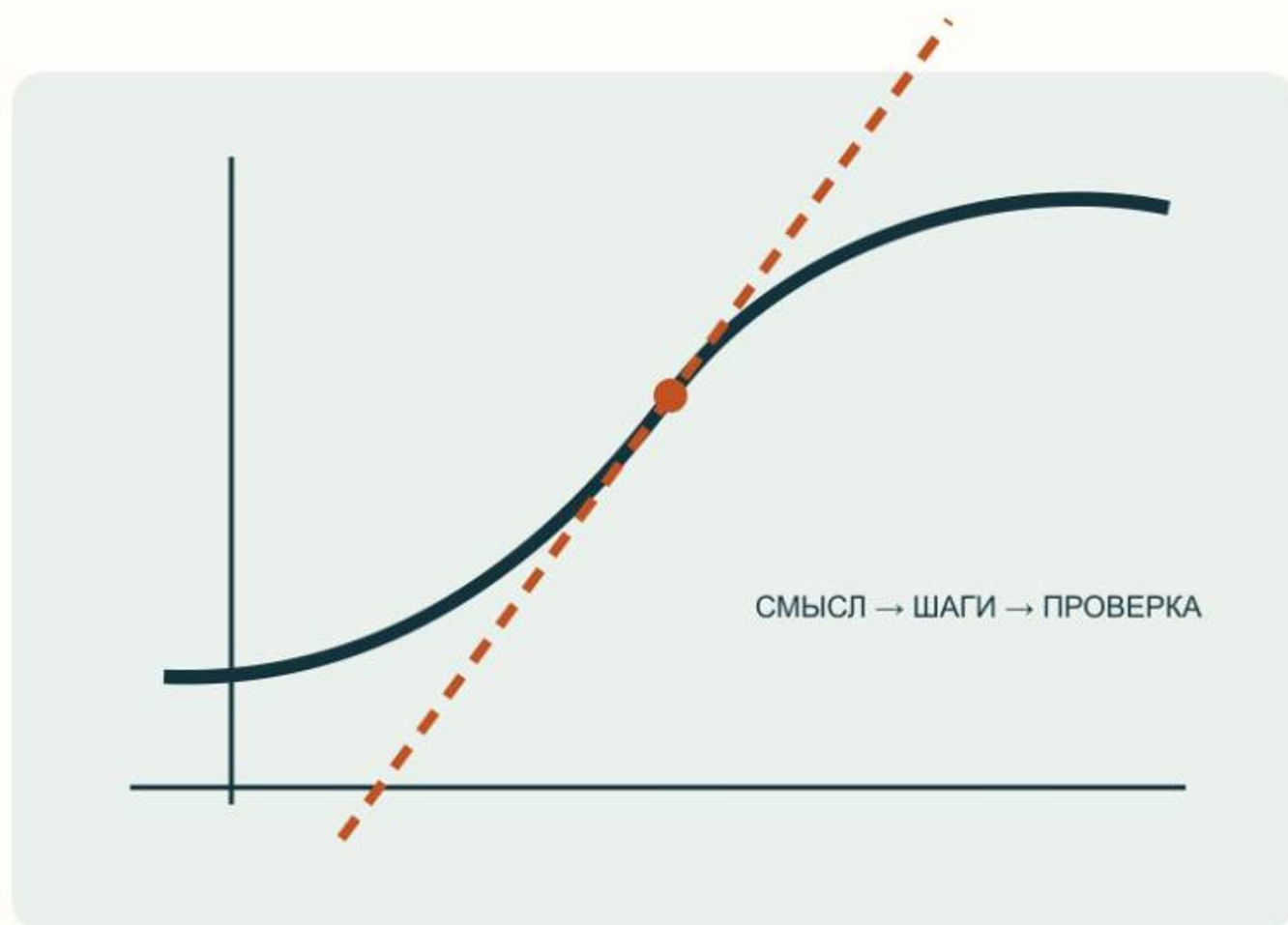


ГЛЕБ ЗАЙЦЕВ

# ПОНЯТЬ ПРОИЗВОДНУЮ

14 разборов с объяснениями  
и упражнениями



38 самостоятельных заданий

Подсказки и полные решения

ОТ ПРИРАЩЕНИЯ ДО ОЦЕНКИ ОШИБКИ

Глеб Зайцев

**Понять производную. 14 разборов  
с объяснениями и упражнениями**

«Автор»

2026

## **Зайцев Г.**

Понять производную. 14 разборов с объяснениями и упражнениями / Г. Зайцев — «Автор», 2026

Что показывает производная и почему мало просто выучить формулы? Этот практикум ведёт от приращения и средней скорости к касательной, правилам дифференцирования, экстремумам и линейному приближению. Внутри — 14 пошаговых разборов и 38 самостоятельных заданий с подсказками, решениями и проверками. Отдельно разобраны ошибки: потерянная область определения, отсутствующий внутренний множитель, ложный экстремум и недопустимый ответ задачи оптимизации. Нужна школьная алгебра; проверить её помогут шесть входных заданий. Используются многочлены, рациональные функции, квадратный корень и простые кусочные функции. Это первое знакомство с производной, а не полный курс математического анализа и не сборник всех заданий экзамена.

# Содержание

|                                      |    |
|--------------------------------------|----|
| Прежде чем вычислять                 | 5  |
| Как читать эту книгу                 | 5  |
| Что нужно знать заранее              | 6  |
| Обозначения и точность               | 7  |
| Входная самопроверка                 | 8  |
| Задание В1                           | 8  |
| Задание В2                           | 9  |
| Задание В3                           | 10 |
| Задание В4                           | 11 |
| Задание В5                           | 12 |
| Задание В6                           | 13 |
| Маршрут по разборам                  | 14 |
| От изменения к производной           | 15 |
| Разбор 1. Что именно изменилось      | 15 |
| Упражнение 1.1                       | 17 |
| Упражнение 1.2                       | 18 |
| Разбор 2. Изменение на единицу входа | 19 |
| Упражнение 2.1                       | 21 |
| Упражнение 2.2                       | 22 |
| Разбор 3. Как появляется производная | 23 |
| Упражнение 3.1                       | 25 |
| Упражнение 3.2                       | 26 |
| Разбор 4. Прямая возле графика       | 27 |
| Конец ознакомительного фрагмента.    | 28 |

# **Глеб Зайцев**

## **Понять производную. 14 разборов с объяснениями и упражнениями**

### **Прежде чем вычислять**

#### **Как читать эту книгу**

Увидеть в таблице формулу производной проще, чем понять, какую величину она описывает. Из-за этого решение иногда выглядит убедительно, но отвечает не на тот вопрос: вместо площади найден наклон, вместо допустимого максимума — точка за границей области, вместо производной — среднее изменение на одном интервале. Эта книга устроена вокруг таких развилок.

Первые пять разборов вводят смысл: аргумент, приращение, среднюю скорость, предел и касательную. В шестом–десятом появляются удобные правила вычисления. Последние четыре разбора показывают, когда правила требуют остановиться и проверить условия, а также как производная помогает сравнивать значения и строить приближения.

В каждом разборе сначала сформулирована задача, затем объяснён выбор хода. Есть полностью решённая ситуация, явно помеченное ошибочное рассуждение и два самостоятельных упражнения. Подсказки и решения вынесены после основной части: сначала попробуйте записать хотя бы область, искомую величину и первый шаг. Правильный ответ без понимания переходов — повод вернуться к объяснению.

Всего здесь 14 разобранных примеров и 38 самостоятельных заданий: 6 входных, 28 после разборов и 4 итоговых. Входные задания проверяют алгебру, а не производные. Их цель — заранее обнаружить пробел, который иначе будет выглядеть как непонимание анализа. Если раскрытие скобок или дроби вызывают трудности, разберите соответствующее решение до продолжения.

Ссылки в электронной книге ведут к подсказке, решению и обратно к условию. Если читалка открыла соседнюю страницу или не поддерживает переход, воспользуйтесь оглавлением и номером задания: В1–В6 для входных, номер разбора и номер упражнения для основных, И1–И4 для итоговых. Все необходимые формулы и рисунки находятся в книге; внешний аккаунт или программа для решения не нужны.

## Что нужно знать заранее

Понадобятся действия с дробями, отрицательными числами, степенями и квадратным корнем, раскрытие скобок и простые уравнения. Обозначение функции  $f(x)$  означает её значение при аргументе  $x$ , а не произведение  $f$  на  $x$ . Если это пока непривычно, первая глава вводит обозначение на конкретных вычислениях.

Книга не охватывает тригонометрические, показательные и логарифмические производные, интегралы, ряды и функции нескольких переменных. Это ограничение позволяет подробно обсудить первые решения, не скрывая пропущенные знания за фразой «очевидно». Никаких гарантированных экзаменационных баллов или сроков освоения материал не обещает.

Сюжеты с движением и площадкой — учебные модели с прямо указанными предположениями. Они помогают проследить связь формулы и вопроса, но не являются инженерными расчётами для реального строительства или оборудования.

## Обозначения и точность

$x^2$  и  $x^3$  — квадрат и куб; запись  $x^4$  означает четвёртую степень. Символ  $\sqrt{x+1}$  обозначает неотрицательный квадратный корень из всего выражения в скобках. Дробь  $(x+1)/(x-2)$  читается как весь числитель, делённый на весь знаменатель. Скобки нельзя отбрасывать только потому, что строка стала длинной.

$f'(x)$  читается «эф штрих от икс» и обозначает функцию-производную;  $f'(a)$  — её значение в конкретной точке, если производная существует. Штрих не является степенью.  $h$  и  $\Delta x$  обозначают приращение аргумента;  $\Delta f$  — соответствующее изменение значения функции. В разностном отношении  $h$  обязательно отлично от нуля, хотя затем рассматривается его стремление к нулю.

Вертикальные черты  $|h|$  обозначают модуль: расстояние числа  $h$  от нуля. Если  $h \geq 0$ , то  $|h| = h$ ; если  $h < 0$ , то  $|h| = -h$ . Например,  $|-0,2| = 0,2$ . Модуль позволяет говорить о величине изменения отдельно от его направления. Поэтому  $|\text{приближение} - \text{точное значение}|$  — неотрицательная величина ошибки.

Функция дифференцируема в точке, если в ней существует производная в принятом здесь смысле. Непрерывность в точке означает, что значения функции при приближении к ней стремятся к её значению в самой точке. Из существования производной следует непрерывность: приращение функции равно  $h$ , умноженному на разностное отношение с конечным пределом, и потому стремится к нулю. Обратное неверно; пример угла рассмотрен в разборе 11.

Десятичные числа записаны через запятую. В координатах и границах интервала используется точка с запятой:  $(2; 5)$  — координаты точки либо открытый интервал по контексту,  $[2; 5]$  — закрытый отрезок. Знаки  $\pm\infty$  обозначают не числа-концы, а неограниченное продолжение интервала. Знак  $\approx$  означает приближённое равенство;  $=$  — точное.

Под обычной производной во внутренней точке здесь понимается конечный двухсторонний предел разностного отношения. Односторонние наклоны и границы рассматриваются отдельно. Утверждение «производной нет» может означать разные ситуации: стороны дают разные числа, отношение не имеет предела или оно становится неограниченным. Их нельзя смешивать в одну формулу.

Рисунки помогают ориентироваться, а вычисления и объяснения обосновывают ответ. Проверка числами не доказывает тождество для всех  $x$ . Где нужен общий вывод, в решении приведено алгебраическое равенство, схема знаков или условие соответствующего правила.

## Входная самопроверка

### Задание В1

В1. Раскройте  $(2 + h)^2 - 4$  и вынесите  $h$  за скобки. При каком условии можно разделить результат на  $h$ ?

[Подсказка — Задание В1](#)

[Решение — Задание В1](#)

## Задание В2

В2. Вычислите  $(\frac{3}{4} - \frac{1}{2})/(\frac{1}{8})$ , сохраняя точные дроби.

[Подсказка — Задание В2](#)

[Решение — Задание В2](#)

## Задание В3

В3. Найдите все действительные  $x$ , для которых существует  $\sqrt[3]{12 - 3x}$ . Вычислите значение при  $x = 1$ .

[Подсказка — Задание В3](#)

[Решение — Задание В3](#)

## Задание В4

В4. Прямая проходит через точку  $(3; -2)$  и имеет наклон 4. Запишите её уравнение.

[Подсказка — Задание В4](#)

[Решение — Задание В4](#)

## Задание В5

В5. Разложите  $x^2 - 5x + 6$  на множители и найдите корни.

[Подсказка — Задание В5](#)

[Решение — Задание В5](#)

## Задание В6

В6. При каких  $x$  определена  $(x^2 - 16)/(x - 4)$ ? Сократите дробь, не изменяя область определения.

[Подсказка — Задание В6](#)

[Решение — Задание В6](#)

## Маршрут по разборам

- [1. Что именно изменилось](#)
- [2. Изменение на единицу входа](#)
- [3. Как появляется производная](#)
- [4. Прямая возле графика](#)
- [5. Наклон тоже зависит от входа](#)
- [6. Степени и суммы](#)
- [7. Два слагаемых произведения](#)
- [8. Частное и потерянная точка](#)
- [9. Функция внутри функции](#)
- [10. Корень внутри области и на краю](#)
- [11. Когда наклон не складывается](#)
- [12. Знаки и точки поворота](#)
- [13. Лучшее значение с ограничением](#)
- [14. Приблизить и оценить ошибку](#)

## От изменения к производной

### Разбор 1. Что именно изменилось

Задача: Научиться различать входное число, результат подстановки и изменение результата, не теряя допустимые значения аргумента.

#### Что пригодится

Подстановка числа в выражение  
Квадрат числа и квадратный корень  
Вычитание отрицательных чисел

#### Как устроен приём

Функция задаёт правило, которое каждому допустимому входному числу сопоставляет единственное выходное число. В записи  $f(x)$  буква  $x$  обозначает аргумент, а вся запись  $f(x)$  — значение функции. Это не произведение букв  $f$  и  $x$ . Например, просьба найти  $f(3)$  означает заменить аргумент числом 3 во всей формуле и вычислить результат.

Прежде чем подставлять числа, установим область определения: множество разрешённых входов. У многочлена разрешены все действительные числа. В дроби нельзя обращать знаменатель в ноль, а под знаком квадратного корня действительное число должно быть неотрицательным. Если формула описывает ограниченную модель, условие задачи может дополнительно сузить эту область.

Пусть сначала аргумент равен  $a$ , затем стал  $b$ . Приращение аргумента записывают  $\Delta x = b - a$ . Знак  $\Delta$  — греческая буква дельта, здесь она обозначает изменение. Отрицательное приращение вполне допустимо: оно сообщает, что второе входное число меньше первого. Слово «приращение» не обещает увеличения.

Приращение значения вычисляют отдельно:  $\Delta f = f(b) - f(a)$ . Сначала применяют правило к каждому входу и лишь затем вычитают результаты в том же порядке. Значение  $f(\Delta x)$  отвечает на другой вопрос: какой выход соответствует входу  $\Delta x$ ? Оно может не совпадать с  $\Delta f$  и даже не существовать, если этот вход запрещён.

#### Разобранная ситуация

Для  $f(x) = x^2 - 2x + 5$  аргумент меняется от 3 до  $5/2$ . Найдите область определения, оба значения функции и оба приращения. Объясните знаки полученных изменений.

1. В формуле только квадрат, умножение и сложение. Значит, область определения — все действительные числа; оба указанных входа допустимы. Дополнительных ограничений в условии нет.

2. Начальное значение равно  $f(3) = 9 - 6 + 5 = 8$ . Число 3 описывает вход, а число 8 — выход; смешивать их в одном вычитании нельзя.

3. Второе значение:  $f(5/2) = 25/4 - 5 + 5 = 25/4$ . Для точности пока оставляем дробь, не заменяя её округлением.

4. Приращение аргумента составляет  $\Delta x = 5/2 - 3 = -1/2$ . Движение по числовой оси было в сторону меньших входных чисел.

5. Приращение значения составляет  $\Delta f = 25/4 - 8 = -7/4$ . Выход уменьшился на  $7/4$ , хотя сама функция в обеих точках имеет положительные значения.

6. Отрицательный знак описывает направление изменения, а не знак начального или конечного значения. Здесь оба приращения отрицательны, но равенства между ними нет: это разные величины.

Ответ: Область — все действительные числа;  $f(3) = 8$ ,  $f(5/2) = 25/4$ ,  $\Delta x = -1/2$ ,  $\Delta f = -7/4$ .

Проверка: Перепишем функцию как  $f(x) = (x - 1)^2 + 4$ . Тогда получаем  $4 + 4 = 8$  и  $9/4 + 4 = 25/4$ . Проверка через другую форму подтверждает оба выхода.

### **Разбираем ошибочное рассуждение**

Ошибочное утверждение: Неверно:  $\Delta f = f(\Delta x)$ , поэтому изменение равно  $f(-1/2) = 25/4$ .

Вычислено значение на новом входе  $-1/2$ , а не разность выходов на двух исходных входах. Совпадение этого результата с конечным значением случайно для выбранных чисел.

Как исправить: Сохраняйте порядок действий словами: конечный выход минус начальный выход. Здесь это  $25/4 - 8$ , а не подстановка разности входов.

### **Что сохранить из разбора**

Всегда держите рядом две пары чисел: входы  $a$  и  $b$ , выходы  $f(a)$  и  $f(b)$ . Каждое приращение вычитается только внутри своей пары.

[К маршруту по разборам](#)

## Упражнение 1.1

Дана  $g(x) = 6/(x - 2)$ . Аргумент меняется от 4 до 5. Укажите область определения, найдите  $\Delta x$  и  $\Delta g$  и объясните, почему положительное приращение аргумента не обязывает значение увеличиться.

[Подсказка — Упражнение 1.1](#)

[Решение — Упражнение 1.1](#)

## Упражнение 1.2

Для  $q(x) = \sqrt{9 - x}$  аргумент меняется от 5 до 0. Найдите область определения и оба приращения. Можно ли в эту же функцию подставить число 10?

[Подсказка — Упражнение 1.2](#)

[Решение — Упражнение 1.2](#)

## Разбор 2. Изменение на единицу входа

Задача: Вычислять среднюю скорость изменения, правильно читать её знак и единицы и не выдавать её за скорость в отдельный момент.

### Что пригодится

Значение функции и приращение  
Деление дробей  
Единицы длины, времени и объёма

### Как устроен приём

Одинаковое увеличение за минуту и за час описывает разные темпы. Средняя скорость изменения функции на промежутке от  $a$  до  $b$  равна  $(f(b) - f(a))/(b - a)$ , где  $a \neq b$ . В числителе стоит изменение выхода, в знаменателе — изменение входа.

Название «скорость» здесь шире движения тела. Можно изучать изменение объёма с течением времени или изменение цены при увеличении количества. Единицы выходной величины делятся на единицы входной. Если числитель измеряется в литрах, а знаменатель в минутах, ответ имеет единицы литров в минуту, а не просто литров.

При  $a < b$  знаменатель положителен, поэтому знак отношения задаёт числитель. Положительный ответ означает, что конечный выход больше начального; отрицательный — меньше. Нулевой ответ означает равенство двух конечных значений, но ничего не утверждает о постоянстве функции между ними. Внутри промежутка возможны изменения в обе стороны.

Среднее отношение относится ко всему выбранному промежутку. Оно показывает постоянный темп, который дал бы такое же итоговое изменение за то же время. Однако действительный темп может меняться. Для координаты тела это средняя скорость изменения координаты, а не средняя путевая скорость: пройденный путь при разворотах не равен изменению координаты.

### Разобранная ситуация

Координата тележки описана моделью  $s(t) = t^2 + 2t$ , где  $t$  — секунды,  $s$  — метры,  $0 \leq t \leq 5$ . Найдите среднюю скорость изменения координаты от первой до четвёртой секунды и сравните с промежутком от первой до второй секунды.

1. Обе пары моментов лежат внутри указанного времени работы модели. Для первого промежутка начальный момент равен 1, конечный — 4; длина промежутка составляет 3 секунды.

2. Вычислим координаты:  $s(1) = 1 + 2 = 3$  м;  $s(4) = 16 + 8 = 24$  м. Координата отсчитывается от выбранного начала, а не от момента запуска расчёта.

3. Изменение координаты равно  $24 - 3 = 21$  м. Делим именно эту разность на разность времён:  $21/3 = 7$  м/с.

4. Для второго промежутка  $s(2) = 4 + 4 = 8$  м. Получаем изменение  $8 - 3 = 5$  м за  $2 - 1 = 1$  с, то есть 5 м/с.

5. Ответы различаются, хотя начальный момент один. Средняя скорость зависит от двух концов промежутка, поэтому без их указания вопрос о среднем темпе неполон.

6. Число 7 м/с не сообщает, с какой скоростью тележка двигалась ровно на первой или четвёртой секунде. Пока мы установили только отношение итогового изменения к прошедшему времени.

Ответ: На промежутке от 1 до 4 секунд средняя скорость изменения координаты равна 7 м/с; от 1 до 2 секунд — 5 м/с.

Проверка: Для любых разных  $a$  и  $b$  разность  $s(b) - s(a)$  раскладывается в  $(b - a)(a + b + 2)$ . Среднее отношение равно  $a + b + 2$ : получаем 7 и 5 независимо от отдельных подстановок координат.

### **Разбираем ошибочное рассуждение**

Ошибочное утверждение: Неверно: средняя скорость от первой до четвёртой секунды равна  $s(4)/4 = 6$  м/с.

Такой расчёт использует начало отсчёта времени вместо начала заданного промежутка. В данной модели он отвечает на другой вопрос — об изменении от нулевой до четвёртой секунды, поскольку  $s(0) = 0$ .

Как исправить: Выписывайте оба момента до вычислений. Из конечной координаты вычитайте начальную и делите на прошедшее между ними время.

### **Что сохранить из разбора**

Средняя скорость изменения требует двух разных входов. Она описывает весь промежуток, сохраняет единицы и не раскрывает сама по себе происходящее внутри.

[К маршруту по разборам](#)

## Упражнение 2.1

В модели слива  $V(t) = 30 - 2t - t^2$  объём измеряется в литрах, время — в минутах,  $0 \leq t \leq 4$ . Найдите среднюю скорость изменения объёма от первой до третьей минуты. Объясните отрицательный знак и назовите средний объём потери за минуту.

[Подсказка — Упражнение 2.1](#)

[Решение — Упражнение 2.1](#)

## Упражнение 2.2

Высота метки равна  $y(t) = (t - 2)^2 + 1$ , где высота измеряется в сантиметрах, время — в секундах,  $0 \leq t \leq 4$ . Найдите среднюю скорость изменения высоты от 1 до 3 секунд. Доказывает ли ответ, что метка всё время стояла на месте?

[Подсказка — Упражнение 2.2](#)

[Решение — Упражнение 2.2](#)

## Разбор 3. Как появляется производная

Задача: Получить производную из разностного отношения и понять, почему нулевое приращение нельзя подставлять до сокращения.

### Что пригодится

Средняя скорость изменения  
Раскрытие квадратов и кубов  
Вынесение общего множителя

### Как устроен приём

Чтобы исследовать изменение возле одного входа  $a$ , выберем второй вход  $a + h$ . Буква  $h$  обозначает приращение аргумента. Среднее отношение теперь имеет вид  $(f(a + h) - f(a))/h$ . Оно определено только при  $h \neq 0$ , если оба входа допустимы. Положительное  $h$  ведёт вправо от  $a$ , отрицательное — влево.

Представим, что ненулевое  $h$  становится сколь угодно малым по модулю. Если отношения при этом приближаются к одному конечному числу с обеих сторон, это число называют производной в точке  $a$  и записывают  $f'(a)$ . Штрих читают как «производная», а не как степень. Двухсторонность и конечность входят в принятое здесь определение.

Слово «предел» обозначает не результат деления нуля на ноль, а число, к которому можно сделать отношение сколь угодно близким, достаточно приблизив ненулевое  $h$  к нулю. В примерах с многочленами это удаётся показать раскрытием скобок: после сокращения остаётся постоянная часть и добавка, стремящаяся к нулю.

Несколько маленьких значений  $h$  помогают заметить закономерность, но не доказывают её для всех малых приращений. Поэтому основу решения составляет точное преобразование выражения. В этой книге обычную производную ищем во внутренней точке области, где можно подходить с обеих сторон. Случаи границ и несовпадающих сторон рассмотрим отдельно.

### Разобранная ситуация

Найдите по определению производную функции  $f(x) = 2x^2 + x - 3$  в точке  $a = -1$ . Покажите отдельно вычисление значения, разности, отношения и предела.

1. Многочлен определён на всей числовой прямой, поэтому  $-1$  — внутренняя точка области. Приращение  $h$  может быть как положительным, так и отрицательным. Получаем  $f(-1) = 2 - 1 - 3 = -2$ .

2. Заменим каждый  $x$  на  $-1 + h$ :  $f(-1 + h) = 2(-1 + h)^2 + (-1 + h) - 3$ . Скобки вокруг нового аргумента обязательны.

3. Квадрат равен  $1 - 2h + h^2$ . После умножения и сбора слагаемых получаем  $f(-1 + h) = -2 - 3h + 2h^2$ .

4. Вычтем начальное значение:  $f(-1 + h) - f(-1) = -3h + 2h^2$ . Постоянные члены сократились, поскольку мы сравниваем два близких выхода одной функции.

5. При  $h \neq 0$  делим разность на  $h$  и получаем  $-3 + 2h$ . Сокращение допустимо именно для ненулевого приращения; в исходной дроби ноль по-прежнему запрещён.

6. При приближении  $h$  к нулю добавка  $2h$  стремится к нулю с любой стороны. Более точно, расстояние отношения от  $-3$  равно  $2|h|$ ; его можно сделать меньше любой заданной положительной точности.

7. Обе стороны дают одно конечное число  $-3$ . Следовательно, производная существует и  $f'(-1) = -3$ . Это локальный наклон, а не значение  $f(-1)$ , которое равно  $-2$ .

Ответ:  $f'(-1) = -3$ .

Проверка: Независимо раскладываем  $f(x) - f(-1) = 2x^2 + x - 1 = (x + 1)(2x - 1)$ . При  $x \neq -1$  отношение равно  $2x - 1$  и стремится к  $-3$  при  $x \rightarrow -1$ .

### **Разбираем ошибочное рассуждение**

Ошибочное утверждение: Неверно: при  $h = 0$  получается  $0/0$ , поэтому производная не существует.

Определение не требует значения исходного отношения в нуле. Оно исследует поведение отношения на ненулевых приращениях возле нуля.

Как исправить: Сначала преобразуйте дробь при  $h \neq 0$ . Затем найдите предел полученного выражения, не объявляя запрещённое деление выполненным.

### **Что сохранить из разбора**

Производная — конечный двухсторонний предел средних отношений. К нулю приближают ненулевое приращение; сокращения выполняют раньше перехода к пределу.

[К маршруту по разборам](#)

## Упражнение 3.1

По определению найдите  $g'(2)$ , если  $g(x) = 5 - 4x$ . Объясните, почему здесь выбор малого ненулевого приращения вообще не меняет разностное отношение.

[Подсказка — Упражнение 3.1](#)

[Решение — Упражнение 3.1](#)

## Упражнение 3.2

Найдите  $p'(2)$  для  $p(x) = x^3$  через разностное отношение. Обоснуйте предел с обеих сторон, а не только подстановкой нескольких положительных приращений.

[Подсказка — Упражнение 3.2](#)

[Решение — Упражнение 3.2](#)

## Разбор 4. Прямая возле графика

Задача: Строить касательную по точке и производной и отделять её локальное свойство от числа пересечений со всем графиком.

### Что пригодится

Производная по определению

Уравнение прямой

Разложение многочлена на множители

### Как устроен приём

Через две различные точки графика проходит секущая. Её наклон равен разностному отношению, поскольку наклон прямой — это изменение высоты, делённое на изменение горизонтальной координаты. При сближении точек секущие помогают представить производную геометрически. Если производная конечна, она задаёт наклон касательной в выбранной точке.

Касательная в точке с аргументом  $a$  проходит через  $(a; f(a))$  и имеет наклон  $f'(a)$ . Поэтому её уравнение удобно записывать как  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ . Сначала найдите две разные вещи: высоту точки и наклон. Только затем подставляйте их в уравнение, сохраняя скобки вокруг разности аргументов.

Локальное свойство касательной можно прочесть без рисунка. Разность между значением функции в  $a + h$  и высотой этой прямой, делённая на  $h$ , стремится к нулю. Действительно, это разностное отношение функции минус  $f'(a)$ . Значит, после учёта наклона остаётся ошибка, малая по сравнению с приращением аргумента.

Касательная характеризует график возле выбранной точки. Из определения не следует, что во всей области у прямой и графика ровно одна общая точка, или что график обязан оставаться по одну сторону прямой. Эти вопросы решают отдельно. Не переносите на произвольную функцию геометрические привычки, приобретённые на окружностях и параболах.

### Разобранная ситуация

Постройте касательную к  $f(x) = x^3 - 4x$  при  $a = 1$ . Затем найдите все её общие точки с графиком и проверьте, есть ли пересечение вне точки касания.

1. Многочлен определён всюду. Высота точки касания  $f(1) = 1 - 4 = -3$ , поэтому касательная должна проходить через  $(1; -3)$ .

2. Для наклона раскроем  $f(1 + h) = (1 + h)^3 - 4(1 + h) = -3 - h + 3h^2 + h^3$ .

3. Вычитание  $f(1)$  и деление на ненулевое  $h$  дают  $-1 + 3h + h^2$ . Двухсторонний предел равен  $-1$ , значит,  $f'(1) = -1$ .

4. Уравнение прямой:  $y = -3 - (x - 1)$ , то есть  $y = -x - 2$ . Коэффициент перед  $x$  отрицателен: прямая идёт вниз при движении вправо.

5. Для общих точек приравняем высоты:  $x^3 - 4x = -x - 2$ . Получаем  $x^3 - 3x + 2 = 0$ .

6. Левая часть раскладывается в  $(x - 1)^2(x + 2)$ . Поэтому все решения —  $x = 1$  и  $x = -2$ ; квадрат множителя не создаёт новой точки.

7. При  $x = -2$  обе высоты равны нулю. Получилась ещё одна общая точка  $(-2; 0)$ . Более того, возле  $-2$  множитель  $(x - 1)^2$  положителен, а  $x + 2$  меняет знак: график там пересекает прямую.

## **Конец ознакомительного фрагмента.**

Текст предоставлен ООО «Литрес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на Литрес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.