

Глеб Зайцев

Матрицы и системы. 12 разборов с проверками

Глеб Зайцев

**Матрицы и системы. 12
разборов с проверками**

«Автор»

2026

Зайцев Г.

Матрицы и системы. 12 разборов с проверками / Г. Зайцев —
«Автор», 2026

Одна найденная тройка чисел ещё не описывает все решения системы. А нулевая строка не всегда означает ошибку. Этот практикум связывает вычисления с их смыслом: от записи уравнений и преобразований строк — к рангу, свободным переменным, линейным отображениям, обратной матрице, базису, ядру и образу. Внутри 12 разобранных примеров и 32 самостоятельных задания с подсказками, полными решениями и проверками. Все вычисления выполняются на малых матрицах с точными числами; нужны дроби и простые линейные уравнения, специальная программа не требуется. Особое внимание — порядку действий, полноте ответа и исключительным значениям параметра.

© Зайцев Г., 2026

© Автор, 2026

Содержание

Прежде чем преобразовывать матрицу	6
Не только найти числа	6
Как читать запись	7
Границы практикума	8
Входная самопроверка	9
Задание В1	9
Задание В2	10
Задание В3	11
Задание В4	12
Маршрут по разборам	13
От записи системы к пространству решений	14
Разбор 1. От уравнений к записи по строкам	14
Упражнение 1.1	17
Упражнение 1.2	18
Разбор 2. Какие преобразования сохраняют решения	19
Упражнение 2.1	21
Упражнение 2.2	22
Разбор 3. Три неизвестные и обратный ход	23
Упражнение 3.1	25
Упражнение 3.2	26
Разбор 4. Противоречие и пустое условие	27
Упражнение 4.1	29
Упражнение 4.2	30
Разбор 5. Свободный выбор и все решения	31
Конец ознакомительного фрагмента.	32

Глеб Зайцев

Матрицы и системы. 12

разборов с проверками

Матрицы и системы. 12 разборов с проверками

Глеб Зайцев

Одна найденная тройка чисел ещё не описывает все решения системы. А нулевая строка не всегда означает ошибку. Этот практикум помогает связать вычисления с их смыслом: от записи уравнений и преобразований строк - к рангу, свободным переменным, линейным отображениям, обратной матрице, базису, ядру и образу. Внутри 12 разобранных примеров и 32 самостоятельных задания с отдельными подсказками, полными решениями и проверками. Все вычисления выполняются на малых матрицах с точными числами; нужны дроби и простые линейные уравнения, специальная программа не требуется. Особое внимание - порядку действий, полноте ответа и исключительным значениям параметра. Это вводный практикум, а не полный вузовский курс или подготовка к конкретному экзамену.

Прежде чем преобразовывать матрицу

Не только найти числа

Вычисления с матрицами нередко превращаются в соревнование с дробями: перемножить, вычесть, сократить, получить ответ. Но даже безошибочная арифметика не поможет, если раньше был потерян вопрос. Нужно найти одну подходящую пару или все пары? Проверить единственную правую часть или доказать свойство отображения для любого входа? Узнать число независимых условий или количество строк на листе?

В этой книге каждый приём связан с тем, что он сохраняет и что позволяет заключить. Преобразование строк сохраняет множество решений, но обычно меняет сами столбцы. Ранг сообщает о независимых направлениях, но одного ранга матрицы коэффициентов недостаточно для проверки совместности. Обратная матрица решает все правые части сразу, однако существует не для каждой квадратной матрицы.

Маршрут состоит из двенадцати разборов. После каждого есть два самостоятельных упражнения; ещё четыре задания стоят на входе и четыре - в конце. Итого 12 разобранных примеров и 32 задания с подсказками, полными решениями и проверками. Подсказки и ответы вынесены в отдельные разделы, чтобы их не приходилось закрывать ладонью при чтении условия.

Сначала попробуйте записать собственный план в двух предложениях. Затем решайте, не заглядывая в ответ. Если застряли, откройте подсказку, а не сразу всё решение. После сверки важен первый неверный переход: потерянная правая часть, преждевременное деление на параметр и обычная ошибка знака требуют разных исправлений.

Номера заданий повторяются в оглавлении, подсказках и решениях. Если конкретная читалка неточно обработает внутреннюю ссылку, нужный раздел можно найти по номеру. Все матрицы записаны также словами по строкам; рисунок дополняет рассуждение, но не содержит единственных необходимых данных.

Как читать запись

Все числа, переменные и параметры в книге действительные. Вектор $(x; y)$ обозначает столбец из двух координат; запись в одну строку выбрана только для удобства на небольшом экране. Сложение векторов и умножение на число выполняются по координатам: $(x; y) + (u; v) = (x + u; y + v)$, а $c(x; y) = (cx; cy)$.

Матрица размера $m * n$ имеет m строк и n столбцов; первым названо число строк. Если сказано, что A имеет строки $(2; -1; 0)$ и $(1; 3; 4)$, это матрица размера $2 * 3$. Элемент a_{ij} стоит на пересечении строки i и столбца j ; отсчёт начинается с единицы. В указанной матрице $a_{12} = -1$, $a_{21} = 1$.

Матрица системы хранит коэффициенты при переменных в заранее выбранном порядке. В расширенной матрице вертикальная черта отделяет правую часть: строка $(2; -1 \mid 5)$ означает $2x - y = 5$ при порядке $(x; y)$. Черта не обозначает деление. Отсутствующая переменная получает коэффициент 0, а не исчезающий столбец.

Для вектора x из n координат произведение Ax состоит из m чисел. Каждое получается из одной строки A : её элементы умножаются на соответствующие координаты x , результаты складываются. Для строки $(2; -1)$ и вектора $(3; 4)$ это $2 * 3 - 1 * 4 = 2$. Позже мы разберём, почему эта запись связана с линейными отображениями и как умножать две матрицы.

$R1, R2$ и $R3$ - текущие строки. В записи $R2 \leftarrow R2 - 3R1$ меняется только вторая строка: из каждого её элемента вычитается утроенный соответствующий элемент первой, включая правую часть, если она присутствует. Первая строка остаётся прежней. Последовательность таких записей выполняется по порядку, с уже обновлёнными строками.

Знак I обозначает единичную квадратную матрицу: на главной диагонали стоят единицы, вне её - нули. Знак 0 может обозначать число, нулевой вектор или нулевую матрицу; нужный размер следует из названного равенства. Обратная матрица $A^{(-1)}$ - не поэлементное деление единицы на элементы A . Точное определение появится в разборе 9.

R^n - пространство всех действительных векторов с n координатами. Набор векторов порождает множество всех их линейных комбинаций, то есть сумм с произвольными действительными коэффициентами. Термины "базис", "ядро" и "образ" будут введены на конкретных примерах; знать их заранее не требуется. Дроби сохраняем точными: $1/3$ предпочтительнее преждевременного округления до $0,33$.

Границы практикума

Достаточно уверенно работать с отрицательными числами, дробями, раскрытием скобок и простыми линейными уравнениями. Входная самопроверка поможет заметить пробел до более длинного вычисления. Если дроби пока требуют постоянной подсказки, полезнее сначала закрепить их, чем одновременно осваивать новый смысл матрицы.

Мы работаем с небольшими матрицами и точной арифметикой. Вычислительная устойчивость, округления компьютера, комплексные числа, собственные значения, скалярные произведения и ортогональные проекции остаются за пределами книги. Из учебного решения на бумаге нельзя автоматически получить надёжный алгоритм обработки больших измерительных данных.

Это самостоятельный вводный практикум, а не полная программа вуза, экзамена или собеседования. В нём нет обещания оценки, поступления или трудоустройства. Условия, числовые данные и объяснения созданы для этого издания. Стандартные определения и теоремы сверены с университетским учебным источником, указанным в конце; источник не участвовал в подготовке и не подтверждал качество нашей книги.

Входная самопроверка

Задание В1

В1. В порядке переменных $(x; y; z)$ запишите строки расширенной матрицы системы $2y - z = 3, x + z = -1$. Проверьте, подходит ли тройка $(-2; 2; 1)$. Почему нельзя просто выписать коэффициенты в том порядке, в котором они встретились в каждой строке?

Подсказка - Задание В1

Решение - Задание В1

Задание В2

В2. Решите уравнение $3x - 2 = 7$. Отдельно вычислите $2/3 - 5/6$ без округления. Для каждого ответа укажите простую обратную проверку.

Подсказка - Задание В2

Решение - Задание В2

Задание В3

В3. Для каждого уравнения отдельно опишите все действительные t : $0t = 0$; $0t = 4$; $2t = 4$.
Можно ли во всех трёх случаях разделить правую часть на коэффициент при t ?

Подсказка - Задание В3

Решение - Задание В3

Задание В4

В4. A имеет строки $(1; 3)$, $(0; -2)$, $(-1; 1)$. Найдите размер A и произведение $A(1; -2)$, используя правило "строка и координаты вектора". Объясните, почему у ответа не две, а три координаты.

Подсказка - Задание В4

Решение - Задание В4

Маршрут по разборам

1. От уравнений к записи по строкам
2. Какие преобразования сохраняют решения
3. Три неизвестные и обратный ход
4. Противоречие и пустое условие
5. Свободный выбор и все решения
6. Два ранга и число свободных переменных
7. Линейное правило и его столбцы
8. Порядок двух матричных действий
9. Обратная матрица для нескольких правых частей
10. Лишние векторы и единственные координаты
11. Какие входы исчезают и какие выходы достижимы
12. Значения параметра, которые меняют ответ

От записи системы к пространству решений

Разбор 1. От уравнений к записи по строкам

Задача: Научиться записывать систему без потери коэффициентов, различать матрицу коэффициентов и расширенную матрицу и проверять предложенную точку по всем исходным уравнениям. Матрица здесь не новый способ угадывания ответа, а точная организация уже знакомых данных.

Подстановка чисел вместо переменных и вычисление суммы с отрицательными слагаемыми.

Понимание того, что решение системы должно удовлетворять каждому её уравнению одновременно.

Сначала фиксируют порядок неизвестных. При порядке $(x; y; z)$ первый столбец всегда относится к x , второй к y , третий к z , даже если в отдельном уравнении слагаемые записаны иначе.

Отсутствующее слагаемое означает коэффициент 0. Его место в строке нельзя пропускать: иначе следующие коэффициенты будут приписаны другим переменным.

Матрица A содержит только коэффициенты. Если уравнений m , а неизвестных n , размер A равен $m \times n$. Расширенная матрица $[A|b]$ имеет размер $m \times (n+1)$: после черты стоит правая часть соответствующего уравнения.

Вектор неизвестных и предложенное решение считаются столбцами. Запись $(1; -1; 2)$ при порядке $(x; y; z)$ означает $x = 1, y = -1, z = 2$. Числа не меняют мест по внешнему виду уравнения.

Проверка - отдельный расчёт каждой левой части и сравнение с её правой частью. Одного несовпадения достаточно для отказа, но для принятия нужны все равенства. Такая проверка сама по себе не доказывает единственность решения.

МАТРИЦЫ И СИСТЕМЫ / СХЕМА 1

Один столбец — одна переменная

Запись из входного задания В1; порядок (x; y; z).

$$2y - z = 3$$

$$x + z = -1$$

x	y	z	b
0	2	-1	3
1	0	1	-1

Нули сохраняют места отсутствующих переменных.

Последний столбец — правая часть, не неизвестная.

Самостоятельная учебная схема · Глеб Зайцев

Схема 1 повторяет В1: для порядка (x; y; z) уравнения $2y - z = 3$ и $x + z = -1$ дают строки (0; 2; -1 | 3) и (1; 0; 1 | -1). Матрица коэффициентов имеет три столбца; четвёртый столбец расширенной записи содержит правую часть.

Дана система из трёх уравнений с тремя неизвестными: $x + 2z = 5$; $-2x + y - z = -5$; $3y + z = -1$. При порядке (x; y; z) составьте A, b и [A|b]. Решите, какие из двух предложенных векторов $u = (1; -1; 2)$ и $v = (-1; -4; 3)$ являются решениями. Искать все решения пока не требуется.

1. Первое уравнение мысленно дополняем до $x + 0y + 2z = 5$. Второе уже содержит все три неизвестные, а третье дополняем до $0x + 3y + z = -1$. Добавлены нулевые слагаемые, поэтому смысл ни одного равенства не изменился.

2. Матрица A размера 3×3 имеет строки (1; 0; 2), (-2; 1; -1) и (0; 3; 1). Столбец $b = (5; -5; -1)$ имеет размер 3×1 . Нельзя поставить 5 в конец первой строки A: тогда получится уже другая матрица с дополнительным столбцом.

3. Расширенная матрица [A|b] размера 3×4 имеет строки (1; 0; 2 | 5), (-2; 1; -1 | -5) и (0; 3; 1 | -1). Вертикальная черта - разделитель данных, а не арифметическое действие. Порядок строк остаётся тем же, что у исходных уравнений.

4. Для u первое равенство даёт $1 + 2 \cdot 2 = 5$. Второе даёт $-2 \cdot 1 + (-1) - 2 = -5$. Третье даёт $3 \cdot (-1) + 2 = -1$. Все три вычисленные левые части совпали с соответствующими правыми частями, поэтому u является решением системы.

5. Для v первое равенство даёт $-1 + 2 \cdot 3 = 5$, а второе даёт $-2 \cdot (-1) + (-4) - 3 = -5$. Пока обнаружены два верных равенства, но слово "решение" ещё преждевременно: система требует выполнения третьего условия тоже.

6. Третья левая часть для v равна $3*(-4) + 3 = -9$, тогда как правая равна -1 . Получено неверное равенство $-9 = -1$. Следовательно, v не является решением, хотя проходит две проверки из трёх. Совпадение большинства строк для системы не имеет специального значения.

7. Прочитаем матрицу обратно как уравнения. Первая строка задаёт $1x + 0y + 2z = 5$, вторая $-2x + 1y - 1z = -5$, третья $-0x + 3y + 1z = -1$. Обратное чтение подтверждает, что нули, знаки и правые части перенесены без ошибок.

Ответ: A имеет строки $(1; 0; 2)$, $(-2; 1; -1)$ и $(0; 3; 1)$, $b = (5; -5; -1)$. В $[Ab]$ к этим строкам добавляются соответственно 5 , -5 и -1 . Из двух предложенных векторов решением является только $u = (1; -1; 2)$.

Проверка: Вектор вычисленных левых частей для u равен $(5; -5; -1)$, для $v - (5; -5; -9)$. Сравнение именно с b отделяет успешную проверку от неуспешной. Здесь установлено существование хотя бы одного решения и отклонён конкретный кандидат; вывод о количестве всех решений ещё не получен.

Ошибочное утверждение: Если в первом уравнении нет y , можно записать первую строку как $(1; 2)$, а остальные строки оставить трёхэлементными.

У матрицы все строки имеют одинаковое число столбцов. Более существенно то, что без нулевого коэффициента число 2 окажется на втором месте и будет прочитано как коэффициент при y . Исходное уравнение $x + 2z = 5$ незаметно превратится в $x + 2y = 5$.

Как исправить: До записи чисел подпишите для себя порядок $(x; y; z)$, затем заполните каждое место, включая нули. Контрольный вопрос к каждой строке: получится ли исходное уравнение, если умножить её элементы на неизвестные в зафиксированном порядке и сложить?

Матрица хранит систему только вместе с соглашением о порядке неизвестных и расположении правой части. Нулевой коэффициент занимает полноценное место. Прямая подстановка надёжно проверяет конкретный ответ, но вопрос обо всех решениях требует дополнительных рассуждений.

К маршруту по разборам

Упражнение 1.1

Расширенная матрица размера 2×4 задана строками $(2; -1; 0 \mid 4)$ и $(0; 3; 1 \mid -2)$. На этот раз порядок неизвестных - $(z; x; y)$. Восстановите систему и проверьте значения $x = 2$, $y = -8$, $z = 3$. Какой столбец чисел нужно подставить в эту запись?

Подсказка - Упражнение 1.1

Решение - Упражнение 1.1

Упражнение 1.2

В системе $2x + ay = 1$; $x - y + z = 4$ неизвестен коэффициент a . Найдите a , при котором точка $(1; -1; 2)$ в порядке $(x; y; z)$ является решением. Запишите A после выбора a . Можно ли по этой проверке утверждать, что решение единственное? Проверьте также точку $(0; 1; 5)$.

Подсказка - Упражнение 1.2

Решение - Упражнение 1.2

Разбор 2. Какие преобразования сохраняют решения

Задача: Понять, почему разрешённые преобразования строк сохраняют всё множество решений, и научиться отличать их от действий, которые лишь оставляют некоторые старые решения или незаметно создают новые.

Чтение расширенной матрицы как системы уравнений в фиксированном порядке неизвестных.

Решение линейного уравнения с одной неизвестной и проверка точки подстановкой.

Допустимы три действия: обмен двух строк; умножение одной строки на ненулевое число; прибавление к одной строке другой строки, умноженной на любое число. Действие применяется к строке целиком, включая правую часть.

Запись $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$ меняет только вторую строку. Первая строка сохраняется и используется как источник. Коэффициенты и правая часть новой второй строки получаются вычитанием соответствующих элементов.

Обмен строк отменяется тем же обменом. Умножение на s отменяется умножением на $1/s$, если $s \neq 0$. Прибавление sR_1 ко второй строке отменяется вычитанием sR_1 , поскольку первая строка не была изменена.

Обратимость нужна для двух включений: всякое старое решение удовлетворяет новой системе и всякое новое решение удовлетворяет старой. Одного направления недостаточно, чтобы назвать системы равносильными.

Мы преобразуем уравнения, то есть строки, а не столбцы неизвестных. Перестановка столбцов без переименования координат меняет смысл системы и не относится к рассматриваемым строковым действиям.

Решите систему $2x - y = 1$; $3x + 2y = 12$, сохраняя порядок $(x; y)$. После каждого преобразования укажите, как его отменить. Объясните, почему полученная точка - не просто одно подходящее решение, а всё множество решений этой системы.

1. Начальная расширенная матрица размера 2×3 имеет строки $(2; -1 \mid 1)$ и $(3; 2 \mid 12)$. Разделим первую строку целиком на 2: $R_1 \leftarrow (1/2)R_1$. Получаются строки $(1; -1/2 \mid 1/2)$ и $(3; 2 \mid 12)$. Обратное действие - умножить первую строку на 2.

2. Выполним $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$. Меняется только вторая строка, включая правую часть: $12 - 3 \cdot (1/2) = 21/2$. Новая расширенная матрица имеет строки $(1; -1/2 \mid 1/2)$ и $(0; 7/2 \mid 21/2)$. Обратное действие - $R_2 \leftarrow R_2 + 3R_1$.

3. Умножим вторую строку на $2/7$. Это ненулевое число, поэтому действие обратимо умножением на $7/2$. Получаем строки $(1; -1/2 \mid 1/2)$ и $(0; 1 \mid 3)$. Во второй строке теперь непосредственно записано $y = 3$.

4. Выполним $R_1 \leftarrow R_1 + (1/2)R_2$. Вторая строка остаётся прежней; в первой исчезает коэффициент при y , а правая часть становится $1/2 + 3/2 = 2$. Итоговые строки равны $(1; 0 \mid 2)$ и $(0; 1 \mid 3)$. Отмена этого шага - $R_1 \leftarrow R_1 - (1/2)R_2$.

5. Последняя система состоит из равенств $x = 2$ и $y = 3$, поэтому имеет ровно одно решение. Каждая предыдущая система равносильна следующей благодаря описанным обратным действиям. Следовательно, исходная система также имеет ровно одно решение, а не неизвестное дополнительное семейство.

6. Докажем общий принцип прибавления строки. Пусть два уравнения имеют вид $L_1 = b_1$ и $L_2 = b_2$, где L_1 и L_2 - их левые части. Их общее решение удовлетворяет $L_2 + cL_1 = b_2 + cb_1$. Обратно, из $L_1 = b_1$ и $L_2 + cL_1 = b_2 + cb_1$ вычитанием $cL_1 = cb_1$ получаем $L_2 = b_2$. Это доказательство работает для любого числа c , а не только для нашего примера.

7. Для масштабирования общий довод столь же короток: из $L = b$ следует $cL = cb$; при $c \neq 0$ из $cL = cb$ делением на c следует $L = b$. Обмен строк вообще не меняет список требований,

только их порядок. Таким образом, все три разрешённых вида действий сохраняют именно всё множество решений.

Ответ: Единственное решение - $(x; y) = (2; 3)$. Цепочка действий: $R1 \leftarrow (1/2)R1$; $R2 \leftarrow R2 - 3R1$; $R2 \leftarrow (2/7)R2$; $R1 \leftarrow R1 + (1/2)R2$. Все четыре действия обратимы.

Проверка: Подстановка в исходную систему даёт $2 \cdot 2 - 3 = 1$ и $3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$. Она подтверждает найденную точку. Отсутствие других решений подтверждает отдельный довод: конечная система задаёт обе координаты однозначно, а обратимые шаги сохраняют множество решений в обе стороны.

Ошибочное утверждение: Умножение уравнения на 0 тоже допустимо: ведь каждое старое решение по-прежнему удовлетворяет получившемуся равенству $0 = 0$.

Сохранение старых решений не исключает появления новых. Например, система $x = 1$; $y = 2$ имеет только точку $(1; 2)$. Если первую строку умножить на 0, получится $0 = 0$; $y = 2$. Теперь подходит и $(7; 2)$, которая не решала исходную систему. Уничтоженное условие невозможно восстановить делением на 0.

Как исправить: Перед преобразованием проверяйте наличие обратного действия. Масштабировать строку можно только ненулевым числом. Тожество $0 = 0$ разрешается убрать лишь тогда, когда оно уже получено обратимыми действиями или с самого начала было отдельным избыточным уравнением.

Разрешённое строковое действие можно отменить, и именно это защищает всё множество решений. Контролируйте три вещи: меняется ли только объявленная строка, преобразована ли её правая часть и существует ли обратный шаг. Правильная арифметика без этих проверок не гарантирует равносильности.

К маршруту по разборам

Упражнение 2.1

Для системы $2x + y = 4$; $x - y = -1$ ученик выполнил $R2 \leftarrow R2 - (1/2)R1$, но записал строки $(2; 1 \mid 4)$ и $(0; -3/2 \mid -1)$. Найдите точную ошибку, решите исправленную систему и покажите, что ответ из ошибочной записи не проходит исходную проверку.

Подсказка - Упражнение 2.1

Решение - Упражнение 2.1

Упражнение 2.2

Дана система $x + y = 3$; $x - y = 1$. Предложено одновременно заменить обе строки одной и той же суммой двух исходных строк, получив $2x = 4$; $2x = 4$. Сохраняется ли множество решений? Укажите потерянное условие и выполните законное преобразование с использованием той же суммы.

Подсказка - Упражнение 2.2

Решение - Упражнение 2.2

Разбор 3. Три неизвестные и обратный ход

Задача: Провести систему с тремя неизвестными к ступенчатой форме, осмысленно выбрать первую ведущую строку и выполнить обратный ход. Отделить проверку найденной точки от объяснения того, почему других решений нет.

Три обратимых преобразования строк расширенной матрицы.

Вычисления с обыкновенными дробями и перенос слагаемого через знак равенства.

В ступенчатой форме все нулевые строки стоят внизу, а первый ненулевой коэффициент каждой следующей ненулевой строки расположен правее предыдущего. Такой первый коэффициент называют ведущим; его место - ведущей позицией.

Ведущий коэффициент не обязан равняться 1. Если в нужном столбце есть 1 или -1, обмен строк часто упрощает арифметику. Выбирать удобную строку можно, поскольку порядок уравнений не меняет их совместных требований.

Прямой ход зануляет коэффициенты под ведущими позициями. Если выполнено $R_3 \leftarrow R_3 - cR_2$, меняется только третья строка целиком, включая число после черты; вторая остаётся доступной для следующих действий.

Обратный ход начинается с последнего содержательного уравнения. Найденную координату подставляют в строку выше, затем поднимаются дальше. Нет необходимости занулять все элементы над ведущими позициями, если цель - найти решение.

Если после обратимых действий получена треугольная система с ненулевыми коэффициентами при z , затем при y , затем при x , каждая координата определяется ровно одним способом. Это даёт единственность, а прямая подстановка проверяет арифметику.

Решите систему $2x + y - z = 0$; $x - y + 2z = 9$; $3x + 2y + z = 7$. Порядок неизвестных - (x ; y ; z). Выберите первую ведущую строку так, чтобы не вводить дроби уже при первом действии, а после прямого хода найдите координаты снизу вверх.

1. Матрица коэффициентов имеет размер 3×3 . Расширенная матрица размера 3×4 имеет строки $(2; 1; -1 \mid 0)$, $(1; -1; 2 \mid 9)$ и $(3; 2; 1 \mid 7)$. Во второй строке коэффициент при x равен 1, поэтому обменяем первую и вторую строки. Получаем $(1; -1; 2 \mid 9)$, $(2; 1; -1 \mid 0)$, $(3; 2; 1 \mid 7)$.

2. Выполним $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$, меняя только вторую строку, включая правую часть. Получится $(0; 3; -5 \mid -18)$, поскольку $1 - 2 \cdot (-1) = 3$, $-1 - 2 \cdot 2 = -5$ и $0 - 2 \cdot 9 = -18$. Затем $R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$ даёт третью строку $(0; 5; -5 \mid -20)$; первая строка в обоих действиях сохранена.

3. Текущие строки равны $(1; -1; 2 \mid 9)$, $(0; 3; -5 \mid -18)$ и $(0; 5; -5 \mid -20)$. Для уничтожения числа 5 выполним $R_3 \leftarrow R_3 - (5/3)R_2$. Меняется вся третья строка: коэффициент при z равен $-5 + 25/3 = 10/3$, а правая часть равна $-20 + 30 = 10$. Получаем третью строку $(0; 0; 10/3 \mid 10)$.

4. Ступенчатая система записана уравнениями $x - y + 2z = 9$; $3y - 5z = -18$; $(10/3)z = 10$. В последней строке коэффициент $10/3$ ненулевой. Деление даёт $z = 10 \cdot (3/10) = 3$. Остальные неизвестные пока не следует угадывать: их определяют сохранённые верхние строки.

5. Подставляем $z = 3$ во вторую строку: $3y - 15 = -18$. Прибавление 15 к обеим частям даёт $3y = -3$, следовательно, $y = -1$. Знак перед $5z$ уже учтён в левой части; переносить его ещё раз без записи равенства нельзя.

6. Первая строка теперь даёт $x - (-1) + 2 \cdot 3 = 9$, то есть $x + 7 = 9$ и $x = 2$. Обратный ход завершён. Удобная первая строка сократила ранние вычисления, но поздняя дробь $10/3$ совершенно законна и не требует округления.

7. Каждое действие отменяется обменом строк или прибавлением противоположного кратного сохранённой строки. В последней системе сначала однозначно задано z , затем y , затем x . Поэтому найденная точка - единственное решение исходной системы. Даже если выбрать первую строку с коэффициентом 2, при безошибочных обратимых действиях множество решений останется тем же.

Ответ: Единственное решение равно $(x; y; z) = (2; -1; 3)$. Одна удобная ступенчатая форма имеет строки $(1; -1; 2 \mid 9)$, $(0; 3; -5 \mid -18)$ и $(0; 0; 10/3 \mid 10)$.

Проверка: В исходных, а не только преобразованных уравнениях получаем $2*2 - 1 - 3 = 0$; $2 - (-1) + 2*3 = 9$; $3*2 + 2*(-1) + 3 = 7$. Все три правые части совпали. Ненулевые ведущие коэффициенты 1, 3 и $10/3$ отдельно подтверждают однозначность обратного хода.

Ошибочное утверждение: Если в третьей строке уже найдено единственное значение z , значит вся система имеет единственное решение, даже если оставшиеся строки ещё не изучены.

Однозначность одной координаты не означает однозначности всех. Например, система $x + y = 2$; $z = 3$ допускает и $(0; 2; 3)$, и $(1; 1; 3)$. Сведения о z не отделяют x от y . В нашем разборе единственность следует из трёх последовательно определяемых координат, а не из одной последней строки.

Как исправить: Продолжайте обратный ход и проверяйте, что на каждом уровне оставшаяся неизвестная имеет ненулевой коэффициент. Если строка определяет лишь связь двух ещё не найденных координат, вывод о единственности делать рано.

Прямой ход организует зависимость уравнений, а обратный ход последовательно восстанавливает координаты. Удобный ведущий элемент облегчает вычисления, но не заменяет проверки правых частей, знаков и ненулевых делителей. Единственность относится ко всем координатам вместе.

К маршруту по разборам

Упражнение 3.1

После законного прямого хода получена система $2x + y - z = 1$; $-3y + 2z = 8$; $4z = 10$. Ученик нашёл $z = 5/2$, затем записал $-3y = 8 + 5 = 13$. Найдите ошибку, закончите обратный ход точно и объясните, нужна ли дополнительная строковая редукция до единичной матрицы.

Подсказка - Упражнение 3.1

Решение - Упражнение 3.1

Упражнение 3.2

В системе $2y + z = 5$; $x - y = 1$; $2x + y - z = h$ требуется, чтобы решение имело $z = 1$. Найдите правую часть h и докажите, что при ней решение единственное. Объясните, почему ноль при x в первом уравнении не мешает начать прямой ход.

Подсказка - Упражнение 3.2

Решение - Упражнение 3.2

Разбор 4. Противоречие и пустое условие

Задача: Увидеть несовместность как конкретное невозможное равенство, отличить строку $0 = 0$ от строки $0 = c$ при $c \neq 0$ и найти точное условие на правую часть, при котором противоречие исчезает.

Чтение строк расширенной матрицы и обратимые действия над ними.

Понимание того, что система требует одновременного выполнения всех уравнений.

Система называется совместной, если у неё есть хотя бы одно решение, и несовместной, если нет ни одного. Эти слова ничего не говорят о единственности: совместная система может иметь много решений.

Строка $(0; 0; 0 \mid 0)$ при трёх неизвестных задаёт $0x + 0y + 0z = 0$, то есть тождество $0 = 0$. Оно выполняется при любом наборе координат и не добавляет ограничения к остальным строкам.

Строка $(0; 0; 0 \mid c)$, где $c \neq 0$, задаёт невозможное равенство $0 = c$. Она не разрешается выбором неизвестных: все их коэффициенты уже равны нулю. Такая строка делает всю систему несовместной независимо от других строк.

Обратимые действия сохраняют множество решений в обе стороны. Поэтому противоречие, полученное законным прямым ходом, доказывает отсутствие решений у исходной системы; оно не является новой случайной помехой, внесённой методом.

Если правая часть противоречивой строки содержит параметр, сначала решают условие её равенства нулю. После этого отдельно проверяют оставшиеся уравнения: исчезновение одного противоречия необходимо, но без такой проверки не всегда достаточно.

МАТРИЦЫ И СИСТЕМЫ / СХЕМА 2

Три результата, а не один шаблон

Отдельные примеры систем с неизвестными x и y .

ЕДИНСТВЕННОЕ РЕШЕНИЕ

$$x = 1; y = 2$$

Ответ: $(1; 2)$

НЕТ РЕШЕНИЙ

$$x + y = 3; 0 = 1$$

Противоречие

БЕСКОНЕЧНО МНОГО

$$x + y = 3; 0 = 0$$

$$(3 - t; t), t \in \mathbb{R}$$

Схема 2 - три отдельные системы, не продолжение одного преобразования. Система $x = 1, y = 2$ имеет единственное решение. Система $x + y = 3, 0 = 1$ несовместна. Система $x + y = 3, 0 = 0$ имеет все решения $(3 - t; t), t \in \mathbb{R}$. Само по себе тождество в одной строке не определяет ответ: нужно учитывать остальные строки и число переменных.

Исследуйте систему $x + 2y - z = 4; 2x + 4y - 2z = 8; 3x + 6y - 3z = 13$ в порядке $(x; y; z)$. Не ищите приближительную точку: определите, существует ли точное решение, и покажите, какая строка даёт решающий вывод.

1. Матрица A размера 3×3 имеет строки $(1; 2; -1), (2; 4; -2), (3; 6; -3)$. Расширенная матрица размера 3×4 имеет строки $(1; 2; -1 \mid 4), (2; 4; -2 \mid 8), (3; 6; -3 \mid 13)$. Коэффициенты второй и третьей строк кратны первой, но правые части нужно проверить отдельно.

2. Выполним $R2 \leftarrow R2 - 2R1$. Меняется только вторая строка целиком: все три коэффициента становятся нулевыми, а правая часть равна $8 - 2 \cdot 4 = 0$. Получена строка $(0; 0; 0 \mid 0)$. Она означает, что второе исходное уравнение повторяло первое с множителем 2.

3. Теперь выполним $R3 \leftarrow R3 - 3R1$. Первая строка по-прежнему сохранена. Новые коэффициенты третьей строки нулевые, а правая часть равна $13 - 3 \cdot 4 = 1$. Третья строка становится $(0; 0; 0 \mid 1)$.

4. Полученные уравнения равны $x + 2y - z = 4; 0 = 0; 0 = 1$. Вторая строка не ограничивает координаты, но третья не выполняется ни для одной точки. Нельзя исправить равенство $0 = 1$ подбором больших или дробных значений x, y, z : умножение на нулевые коэффициенты всегда даёт ноль.

5. Следовательно, преобразованная система не имеет решений. Оба шага обратимы прибавлением соответствующего кратного первой строки, поэтому исходная система тоже не имеет решений. Мы не отбросили неудачный кандидат, а исключили сразу все возможные кандидаты.

6. Проверим вывод непосредственно без матричной записи. Если первое равенство верно, его утроение требует $3x + 6y - 3z = 12$. Третье исходное равенство требует для той же левой части 13. Одно и то же число не равно одновременно 12 и 13; это независимый короткий довод о несовместности.

Ответ: Система несовместна. Решающая строка - $(0; 0; 0 \mid 1)$, полученная как $R3 - 3R1$; она задаёт невозможное равенство $0 = 1$. Строка $(0; 0; 0 \mid 0)$ сама по себе противоречия не содержит.

Проверка: Комбинация третьего уравнения минус утроенное первое имеет нулевую левую часть и правую часть $13 - 12 = 1$. Этот расчёт не зависит от x, y, z и потому доказывает отсутствие любого решения, а не только неудачу нескольких пробных точек.

Ошибочное утверждение: Любую строку, у которой все коэффициенты при неизвестных равны нулю, можно удалить как ненужную.

Слово "коэффициенты" здесь не включает правую часть. У строк $(0; 0; 0 \mid 0)$ и $(0; 0; 0 \mid 1)$ одинаковые коэффициенты, но противоположная роль: первая разрешает любую точку, вторая запрещает все. Удаление второй строки превратило бы пустое множество решений в непустое.

Как исправить: Прежде чем убрать нулевую строку, прочитайте её вместе с числом после черты. Удалять как избыточное условие можно тождество $0 = 0$; равенство $0 = c$ при ненулевом c нужно сохранить как свидетельство несовместности.

Нулевая левая часть - ещё не диагноз. Всегда смотрите направо: $0 = 0$ ничего не требует, а $0 = c$ при $c \neq 0$ запрещает все решения. Для параметрического условия доказывайте и необходимость отсутствия противоречия, и достаточность оставшейся системы.

К маршруту по разборам

Упражнение 4.1

Для каких действительных h совместна система $2x - y = 3$; $6x - 3y = h$? Найдите точное условие и при допустимом h предъявите хотя бы одно решение. Полное множество решений в этом упражнении описывать не требуется.

Подсказка - Упражнение 4.1

Решение - Упражнение 4.1

Упражнение 4.2

Две системы с порядком $(x; y; z)$ уже приведены обратимыми действиями к строкам $(1; 0; 2 \mid 5)$, $(0; 1; -1 \mid -2)$ и $(0; 0; 0 \mid c)$. Для первой $c = 0$, для второй $c = -4$. Сравните совместность. Для совместной системы укажите две разные точки, чтобы проверить утверждение "раз осталось два уравнения, решение одно".

Подсказка - Упражнение 4.2

Решение - Упражнение 4.2

Разбор 5. Свободный выбор и все решения

Задача: Описать все решения системы с двумя уравнениями и тремя неизвестными с помощью свободного параметра. Проверить оба направления: каждый параметр даёт решение и всякое решение получается при некотором параметре.

Прямой и обратный ход для расширенной матрицы.

Различение тождества, противоречия и содержательного уравнения.

После приведения к ступенчатой форме переменные ведущих столбцов выражают через остальные. Переменную неведущего столбца называют свободной: в совместной системе её значение можно выбрать, а затем восстановить ведущие переменные.

Параметризация должна содержать область значений параметра. Фраза "t - любое действительное число" существенно сильнее перечня $t = 0, 1, 2$: решения с отрицательными числами и дробями тоже должны быть охвачены.

Первое направление проверки - достаточность: подставить общие формулы координат и получить все исходные правые части при произвольном разрешённом параметре. Несколько числовых подстановок не заменяют это тождественное вычисление.

Второе направление - полнота: взять произвольное решение, назвать одну его координату параметром и вывести для остальных именно предложенные формулы. Тогда ни одно решение не оказалось за пределами семейства.

Разные параметры и разные формулы могут описывать одно множество. Для сравнения полезно выразить один параметр через другой и проверить, что замена достигает всех разрешённых значений, а не только части из них.

Найдите все решения системы $x + 2y - z = 4$; $2x - y + 3z = 1$ в порядке $(x; y; z)$. Укажите одну свободную переменную и докажите полноту ответа. Затем перепишите то же множество, используя y вместо z как параметр.

1. А имеет размер 2×3 и строки $(1; 2; -1)$, $(2; -1; 3)$. Расширенная матрица размера 2×4 имеет строки $(1; 2; -1 \mid 4)$ и $(2; -1; 3 \mid 1)$. Действие $R2 \leftarrow R2 - 2R1$ изменяет только вторую строку целиком и даёт $(0; -5; 5 \mid -7)$.

2. Ведущие коэффициенты находятся в столбцах x и y . Второе уравнение $-5y + 5z = -7$ равносильно $y - z = 7/5$, поскольку делим всю строку на ненулевое -5 . Следовательно, $y = z + 7/5$. Отдельного уравнения, фиксирующего z , нет.

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «Литрес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на Литрес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.