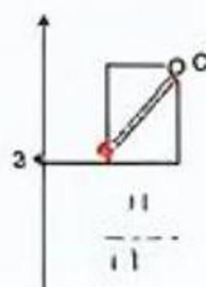
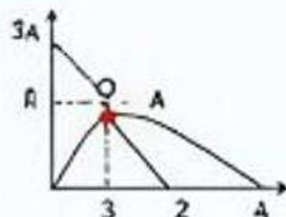
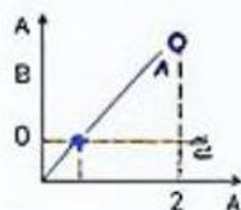
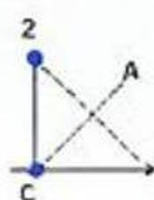
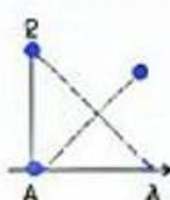
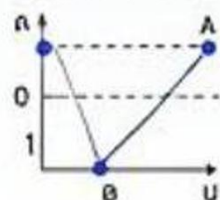


Серя нога математике для росомсзтенного изучения

Сорознати матикетоканенкотарананоя
варознати зикіпкоставенья



Сорознати мазенить саяннианоег
веровнит зяколованья маарикатике



$$(0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4})$$

$$= bc - \frac{1}{2} + x \cdot 07$$

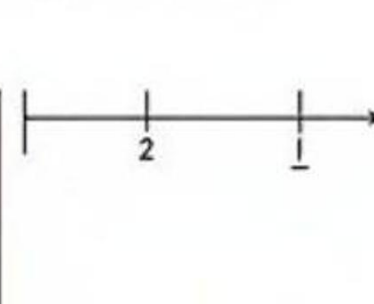
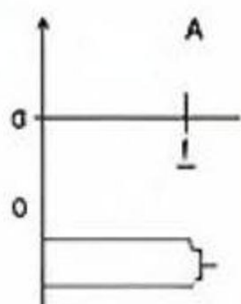
$$(0 = \frac{2}{0} - \frac{4}{0})$$

$$= bc - \frac{1}{3} + x \cdot 607$$

$$(0 = \frac{2}{2} - \frac{2}{2})$$

$$x/c > -1 + x \cdot \frac{4}{2}$$

Сорознати нахиполсиенья таролатикя
поколастэа скоой мкстванзий



$$(0 = \frac{4}{0} - \frac{2}{2})$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} + x \cdot \frac{1}{2}$$

$$/ \eta = x \cdot 12$$

$$n \cdot 9,2 \approx 2$$

$$x = \left| \frac{a \dots}{c \dots} \right|$$

$$07 \quad 3 \cdot x + \frac{x}{2} = - - 0 + \frac{10}{n}$$

$$x = \left| \frac{a \dots}{c \dots} \right|$$

$$+1 \quad - - - - - + \frac{10}{n}$$

$$= \left| \frac{a \dots}{c \dots} \right|$$

$$- - - - - + \frac{10}{n}$$

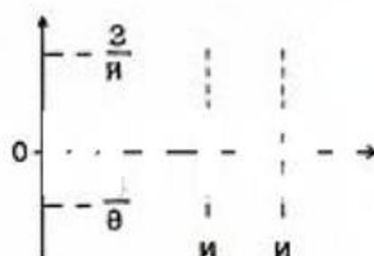
$$n:0$$

$$v^* \quad H:2^*$$

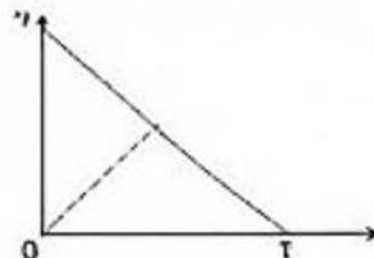
$$n^* \quad (23)$$

$$+1 \quad (7 \cdot 6)$$

Сорознати нахиполсиенья таролатикя
поколастэа скоой мкстванзий



Сорознати нахиполсиенья таролатикя
поколастэа скоой мкстванзий



$$yn=092=046$$

$$n=098=115^*$$

$$ис=031 \quad 050$$

$$ис=008=11^*$$

$$n=017=13^*$$

$$ин=127^* \quad 007$$

$$yn=092=607$$

$$kn=022.12$$

Василиса Волконская

**Интегрирование
гиперболических функций**

«Автор»

2026

Волконская В.

Интегрирование гиперболических функций / В. Волконская —
«Автор», 2026

В серии этих книг собрано много методик по решению и школьной математики и высшей математики. В книгах подробно разобраны различные примеры, для сдачи экзаменов и в школе и в университете. Собраны многие правила и методики решения задач. Материал написан доступно для любого среднего ученика, который хочет понять математику, а не бездумно ее списать.

© Волконская В., 2026

© Автор, 2026

Василиса Волконская

Интегрирование гиперболических функций

Содержание:

- 1) Гиперболические функции.
- 2) Геометрическое определение тригонометрических функций и гиперболических функций.
- 3) Доказательство основного гиперболического тождества.
- 4) Чётность и нечётность гиперболических функций.
- 5) Графики гиперболических функций.
- 6) Связь гиперболических функций с тригонометрическими функциями.
- 7) Основные тождества гиперболических функций. И основные гиперболические формулы.
- 8) Обратные гиперболические функции.
- 9) Основные тождества для обратных гиперболических функций.
- 10) Связь гиперболических функций с логарифмической.
- 11) Производные гиперболических функций.
- 12) Первообразные гиперболических функций.
- 13) Интегралы перехода от гиперболических функций к логарифмическим функциям.
- 14) Примеры интегралов с гиперболическими функциями.
- 15) Интегрирование по частям. Примеры решения.
- 16) Сведение интеграла к тому же интегралу.
- 17) Метод замены переменной.
- 18) Универсальная гиперболическая замена переменной.
18. 1 Замена на тангенс или котангенс половинного аргумента.
18. 2 Замена на тангенс от обычного аргумента.
- 19) Интегрирование иррациональных функций через гиперболические функции.
- 20) Интегрирование гиперболических функций, заменяя их на выражение с экспонентой.

Интегрирование гиперболических функций.

- 1)) Гиперболические функции.

Гиперболические функции - это семейство элементарных функций, выражающихся через экспоненту и тесно связанных с тригонометрическими функциями.

Экспонента - это показательная функция с основанием e .

e - число Эйлера.

$e \approx 2,718$

$f(x) = e^x$ - экспонента.

Гиперболические функции задаются формулами.

Гиперболический синус.

$$\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x}) / 2 = (e^{2x} - 1) / 2e^x$$

Гиперболический косинус.

$$\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x}) / 2 = (e^{2x} + 1) / 2e^x$$

Гиперболический тангенс.

$$\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} x = (e^x - e^{-x}) / (e^x + e^{-x}) = (e^{2x} - 1) / (e^{2x} + 1)$$

Гиперболический котангенс.

$$\operatorname{cth} x = 1 / \operatorname{th} x = \operatorname{ch} x / \operatorname{sh} x = (e^x + e^{-x}) / (e^x - e^{-x}) = (e^{2x} + 1) / (e^{2x} - 1)$$

Гиперболический секанс.

$$\operatorname{sch} x = 1 / \operatorname{ch} x = 2 / (e^x + e^{-x})$$

Гиперболический косеканс.

$$\operatorname{csch} x = 1 / \operatorname{sh} x = 2 / (e^x - e^{-x})$$

Гиперболический секанс - это единица делённая на гиперболический косинус.

Гиперболический косеканс - это единица делённая на гиперболический синус.

2)) Геометрическое определение тригонометрических функций и гиперболических функций.

Тригонометрические функции дают параметрическое представление об окружности.

Если окружность единичная с центром в начале координат, то её уравнение определяется по формуле:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 = 1, \text{ если } R = 1$$

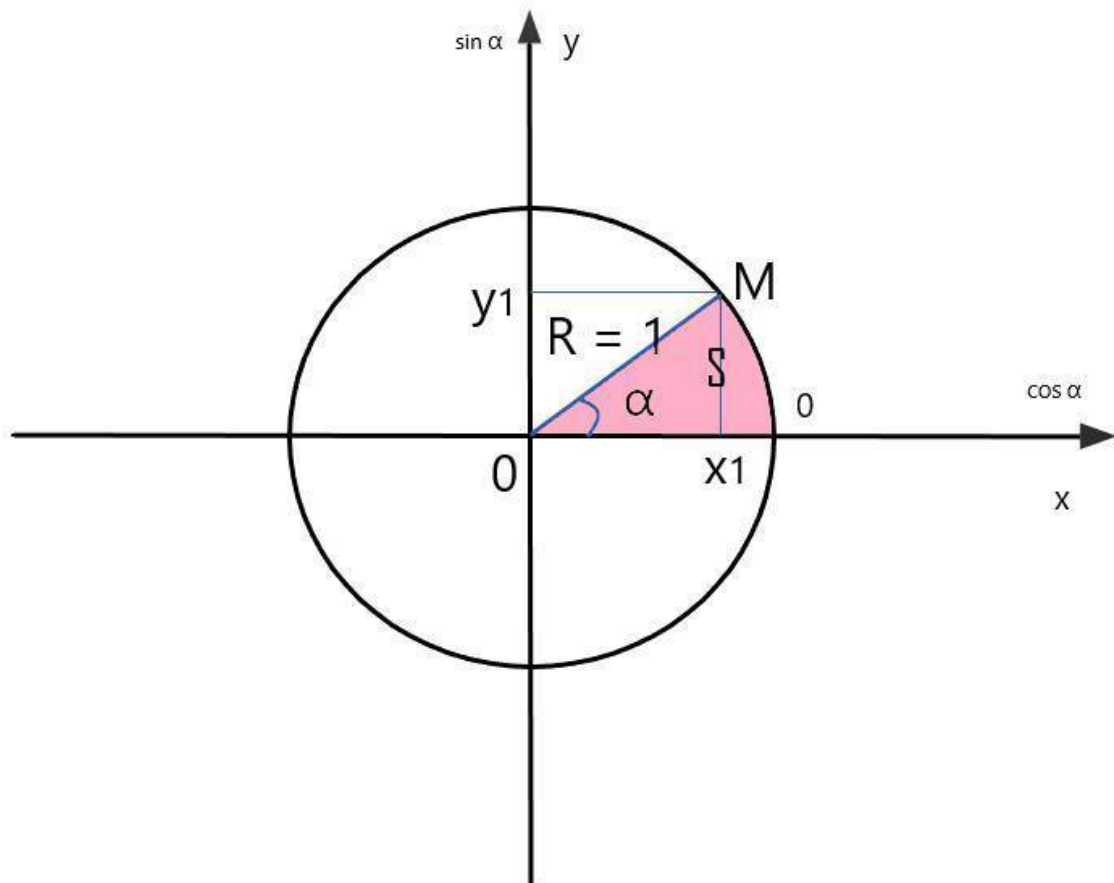
Оси x ставится в соответствие $\cos \alpha$ (косинус).

Оси y ставится в соответствие $\sin \alpha$ (синус).

Получается основное тригонометрическое тождество.

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Это параметрическое задание окружности через тригонометрические функции.



Аргумент под функциями равен двойной площади сектора взятой со знаком плюс, если сектор лежит выше оси x; и взятой со знаком минус, если сектор лежит ниже оси x.

Тригонометрические синус и косинус являются координатами точки на окружности.

Гиперболические функции дают параметрическое представление гиперболы.

Если центр гиперболы находится в начале координат, то её уравнение приводится к каноническому виду.

$$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$$

где

a - действительная полуось.

b - мнимая полуось.

Если a и b равны единице, то получается уравнение единичной гиперболы.

$$x^2 - y^2 = 1$$

Ось x будет действительной осью.

Ось y будет мнимой осью.

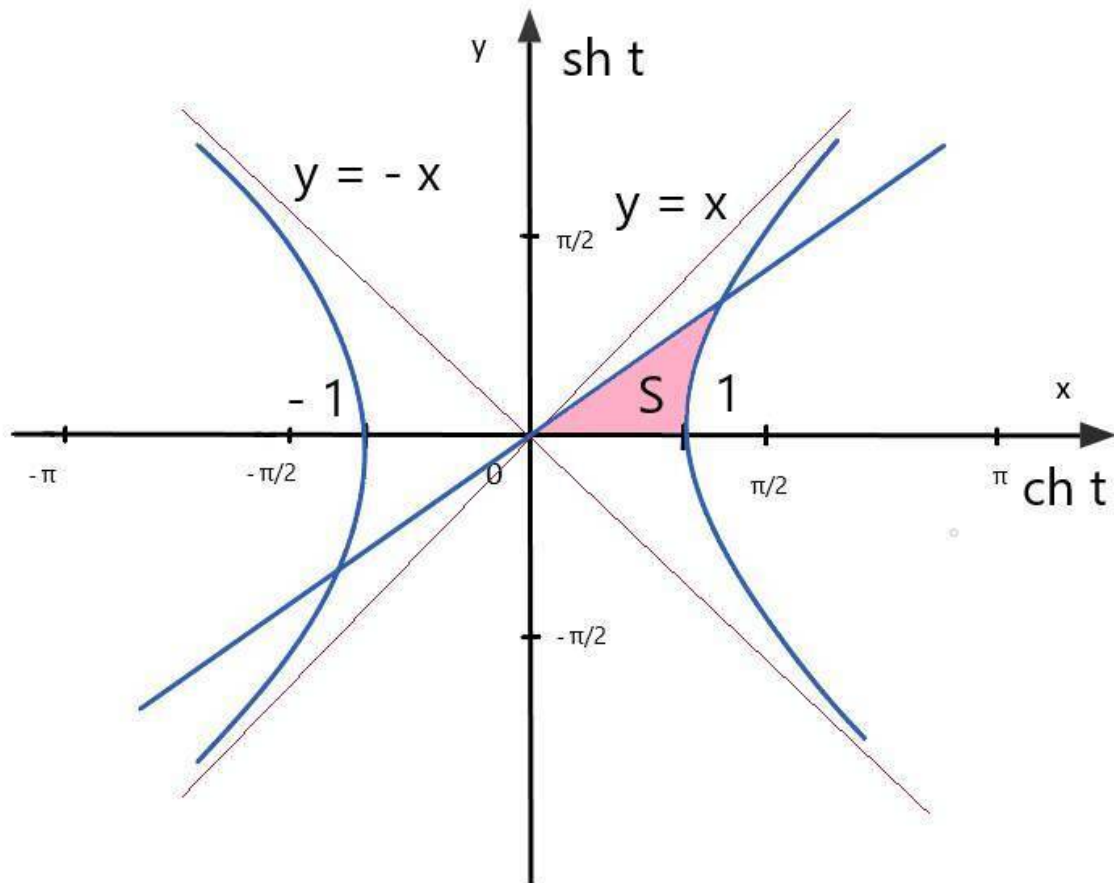
Оси x поставим в соответствие гиперболический косинус $\text{ch } t$.

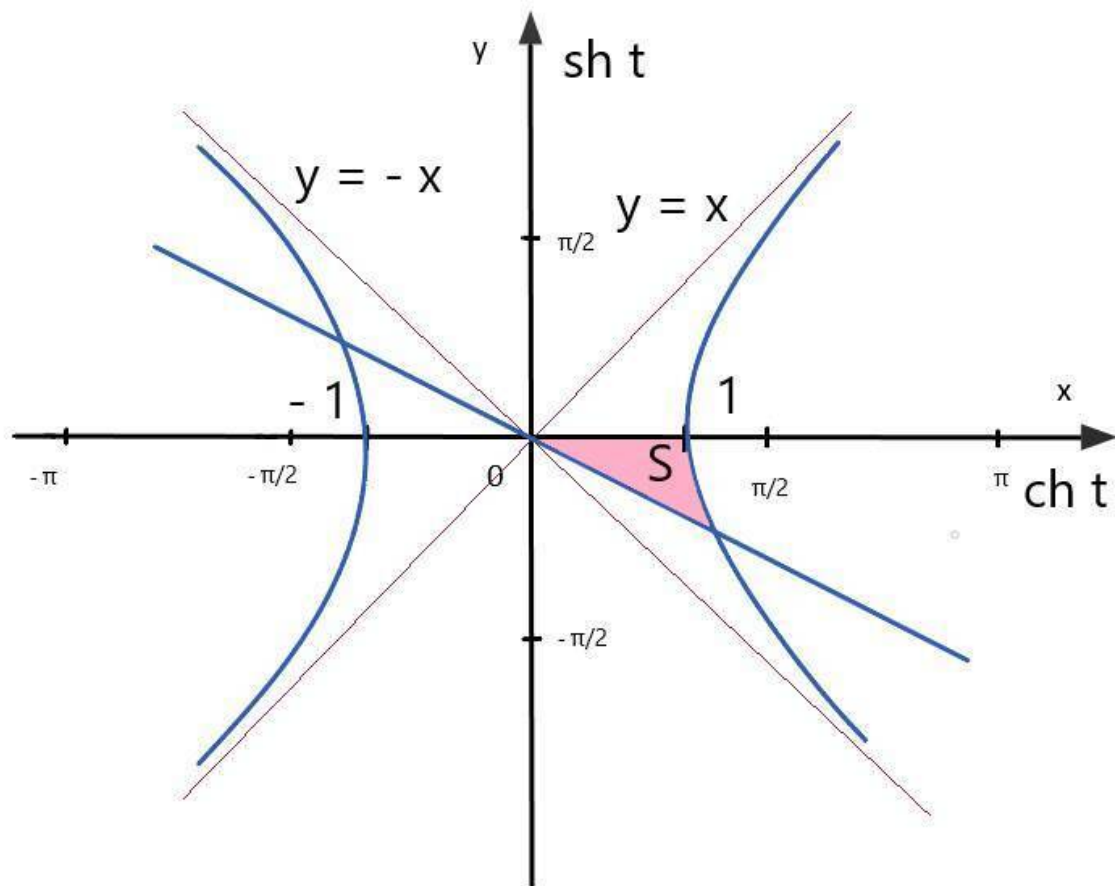
Оси y поставим в соответствие гиперболический синус $\text{sh } t$.

Получаем основное гиперболическое тождество.

$$\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$$

t - аргумент под функциями, равный двойной площади криволинейного треугольника, взятой со знаком плюс, если треугольник лежит выше оси x ; и взятой со знаком минус, если треугольник лежит ниже оси x .





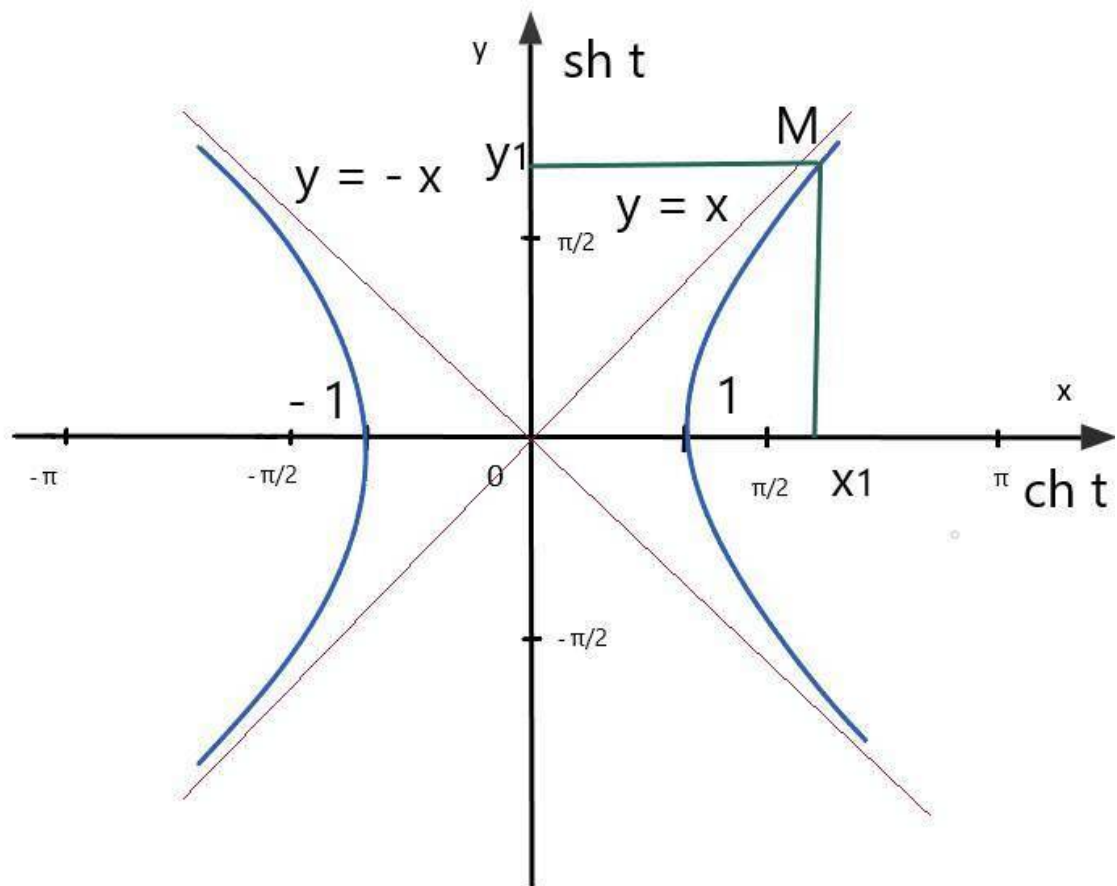
t - это действительный аргумент, называемый гиперболическим углом.

Это параметрическое задание гиперболы через гиперболические функции.

Гиперболический синус и косинус, являются координатами точки на единичной гиперболе.

Гиперболический косинус - это абсцисса точки, расположенной на единичной гиперболе.

Гиперболический синус - это ордината точки, расположенной на единичной гиперболе.



Это определение аналогично определению тригонометрических функций, через единичную окружность.

Тригонометрические синус и косинус являются координатами точки на окружности.

А гиперболические синус и косинус являются координатами точки на единичной гиперболе.

3)) Доказательство основного гиперболического тождества. Звездочка это x .

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

Заменим функции на полу сумму экспонент.

$$(e^{*} + e^{-*})^2 / 2 - (e^{*} - e^{-*})^2 / 2 = 1$$

Приведём дроби к общему знаменателю.

$$((e^{*} + e^{-*})^2 - (e^{*} - e^{-*})^2) / 4 = 1$$

Раскроем скобки по формулам квадрата суммы и разности.

$$(e^{2*} + 2e^{*} \times e^{-*} + e^{-2*} - (e^{2*} - 2e^{*} \times e^{-*} + e^{-2*})) / 4 = 1$$

$$(e^{2*} + 2e^{*-*} + e^{-2*} - e^{2*} + 2e^{*-*} - e^{-2*}) / 4 = 1$$

$$(2e^0 + 2e^0) / 4 = 1$$

$$4 / 4 = 1$$

$$1 = 1$$

Тождество доказано.

4)) Чётность и нечётность гиперболических функций.

Гиперболический косинус функция чётная.

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$$

Минус пропадает.

Гиперболические синус, тангенс, котангенс функции нечётные.

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$$

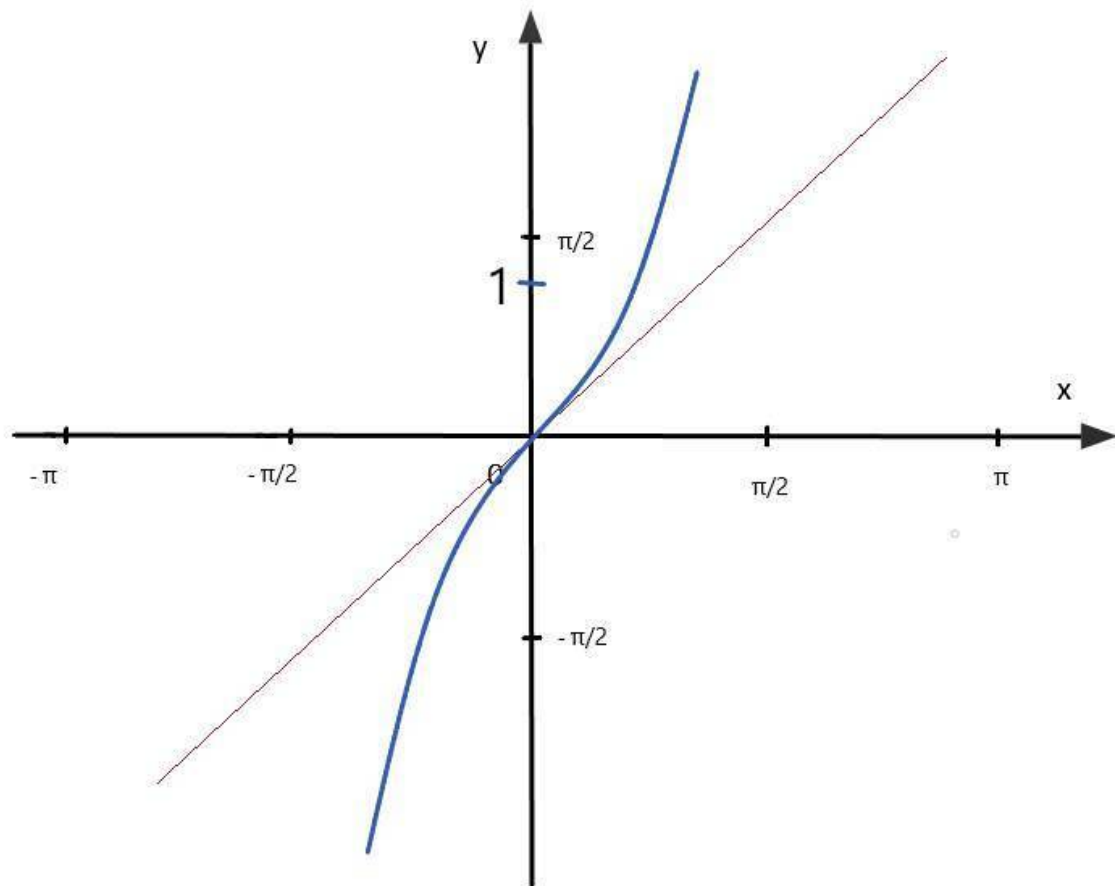
$$\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$$

Минус выносится за функцию.

5)) Графики гиперболических функций.

1) Гиперболический синус.

$$y = \operatorname{sh} x$$



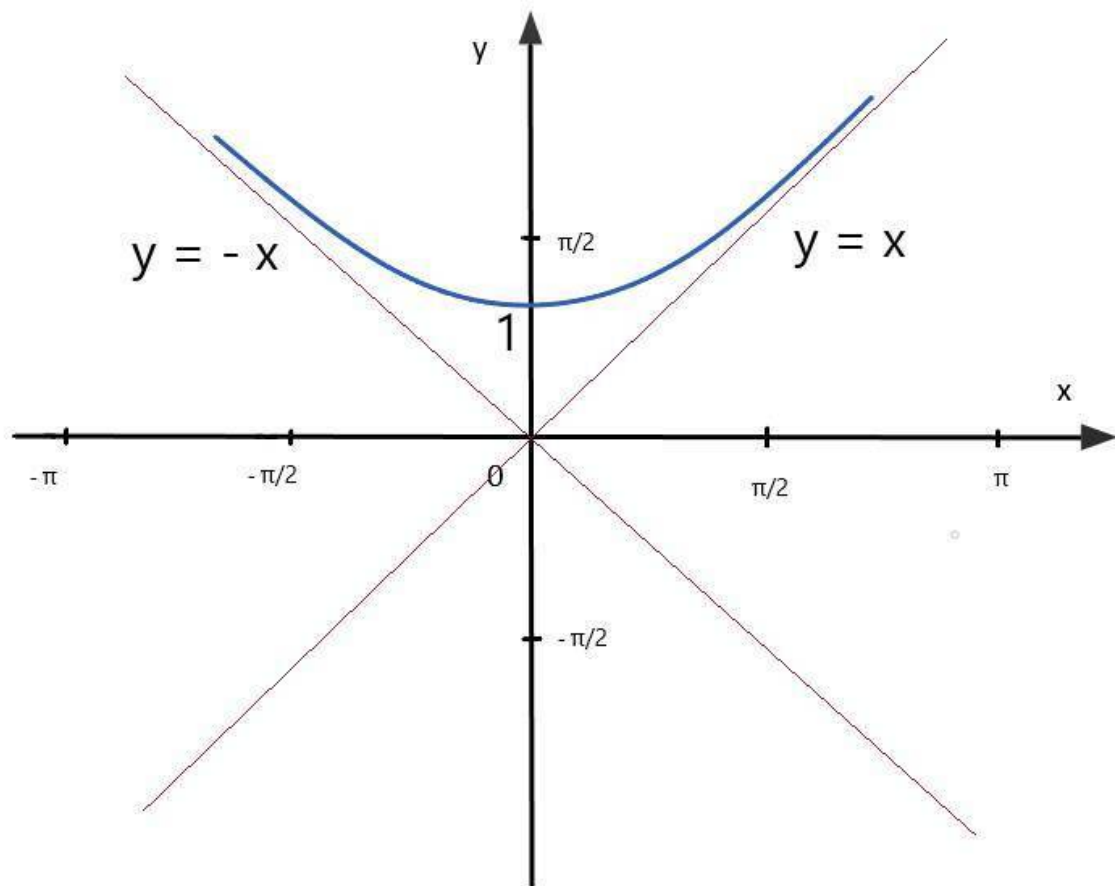
Гиперболический синус возрастает на всей числовой оси.

$D(f): x \in (-\infty; +\infty)$.

$E(f): y \in (-\infty; +\infty)$

2) Гиперболический косинус.

$$y = \operatorname{ch} x$$

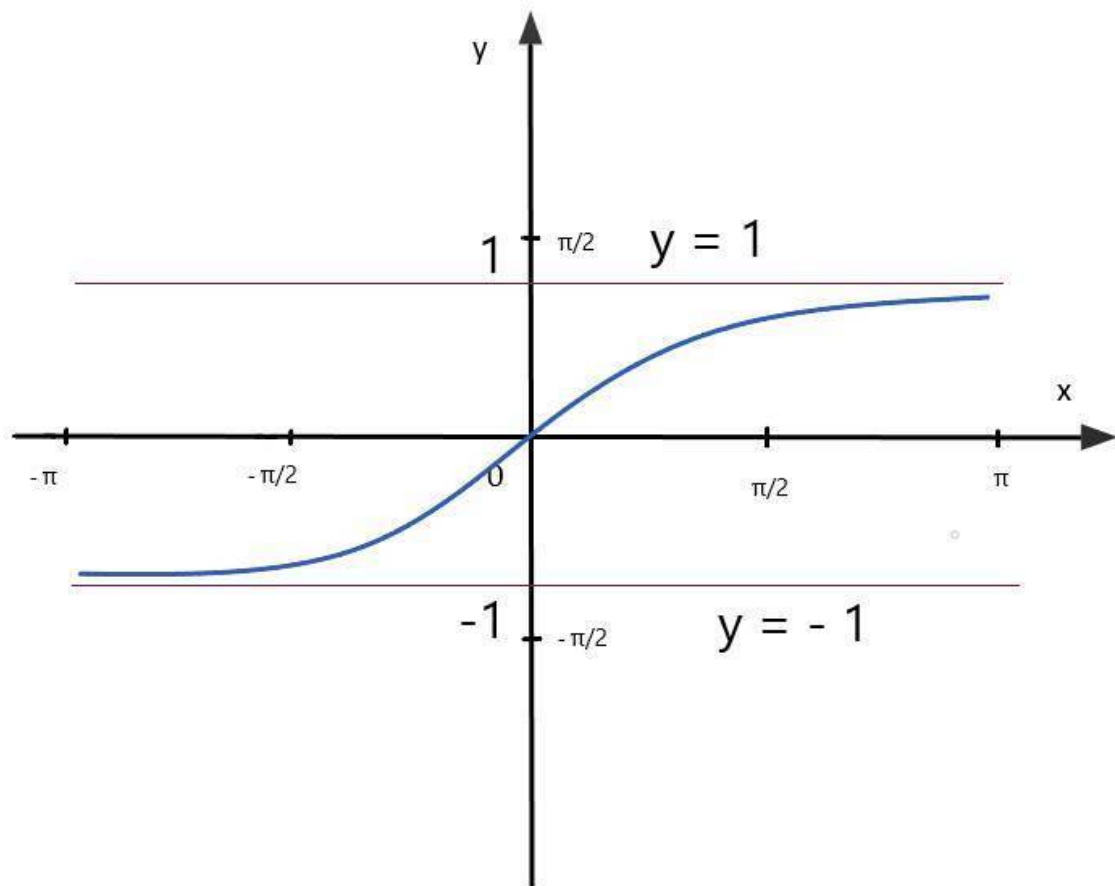


Гиперболический косинус убывает на $(-\infty; 0)$ и возрастает на $(0; +\infty)$.

Точка $(0; 1)$ является минимумом функции.

3) Гиперболический тангенс.

$y = \text{th } x$



Гиперболический тангенс возрастает на всей числовой оси.

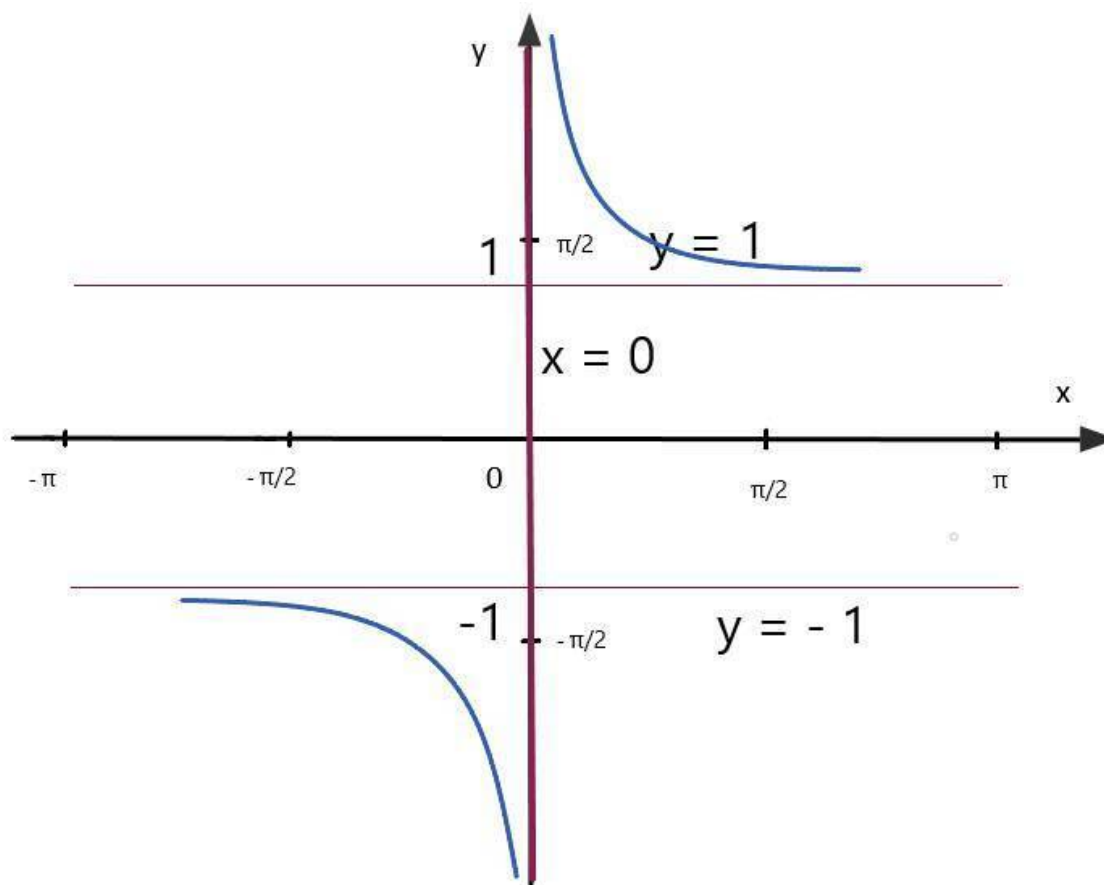
Он имеет две горизонтальные асимптоты $y = -1$ и $y = 1$.

$D(f): x \in (-\infty; +\infty)$.

$E(f): y \in (-1; 1)$

4) Гиперболический котангенс.

$y = \operatorname{cth} x$



Гиперболический котангенс убывает на $(-\infty; 0)$; $(0; +\infty)$

Он имеет две горизонтальные асимптоты $y = 1$ и $y = -1$ и вертикальную асимптоту $x = 0$.

$D(f)$: $x \in x \in (-\infty; 0); (0; +\infty)$.

$E(f)$: $y \in (-\infty; -1); (1; +\infty)$

6)) Связь гиперболических функций с тригонометрическими функциями.

Гиперболические функции выражаются через тригонометрические функции от мнимого аргумента.

$$\operatorname{sh} x = -i \sin i x$$

$$\operatorname{ch} x = \cos i x$$

$$\operatorname{th} x = -i \operatorname{tg} i x$$

$$\operatorname{cth} x = -1 / i \operatorname{ctg} i x = -i \operatorname{ctg} x$$

$$\operatorname{sh} i x = i \sin x$$

$$\operatorname{ch} i x = \cos x$$

$$\operatorname{th} i x = i \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{cth} i x = 1 / i \operatorname{ctg} x = -i \operatorname{ctg} i x$$

7)) Основные тождества гиперболических функций.

$$\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x = -e^{-x}$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1$$

Основные гиперболические формулы.

$$\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{cth} x = \operatorname{ch} x / \operatorname{sh} x$$

$$1 / \operatorname{ch}^2 x = 1 - \operatorname{th}^2 x$$

$$1 / \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{cth}^2 x - 1$$

$$\operatorname{th}^2 x = 1 - 1 / \operatorname{ch}^2 x$$

$$\operatorname{cth}^2 x = 1 + 1 / \operatorname{sh}^2 x$$

$$\operatorname{th} x \times \operatorname{cth} x = 1$$

$$\operatorname{th} x = 1 / \operatorname{cth} x$$

$$\operatorname{cth} x = 1 / \operatorname{th} x$$

Формулы двойного аргумента.

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$$

$$\operatorname{ch} 2x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1$$

$$\operatorname{ch} 2x = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x$$

$$\operatorname{th} 2x = 2 \operatorname{th} x / (1 + \operatorname{th}^2 x) \quad \operatorname{cth} 2x = (1 + \operatorname{th}^2 x) / 2 \operatorname{th} x$$

$$\operatorname{cth} 2x = (\operatorname{th} x + \operatorname{cth} x) / 2 = \operatorname{th} 2x$$

Гиперболический синус и косинус двойного угла через тангенс.

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{th} x / (1 - \operatorname{th}^2 x)$$

$$\operatorname{ch} 2x = (1 + \operatorname{th}^2 x) / (1 - \operatorname{th}^2 x)$$

Формулы понижения степени.

$$\operatorname{ch}^2 x = 1/2 (\operatorname{ch} 2x + 1)$$

$$\operatorname{sh}^2 x = 1/2 (\operatorname{ch} 2x - 1)$$

$$\operatorname{th}^2 x = (\operatorname{ch} 2x - 1) / (\operatorname{ch} 2x + 1)$$

$$\operatorname{cth}^2 x = (\operatorname{ch} 2x + 1) / (\operatorname{ch} 2x - 1)$$

Формулы перехода к тангенсу и котангенсу.

$$\operatorname{ch}^2 x = 1 / (1 - \operatorname{th}^2 x)$$

$$\operatorname{sh}^2 x = 1 / (\operatorname{cth}^2 x - 1)$$

$$\operatorname{ch}^2 x = \operatorname{cth}^2 x / (\operatorname{cth}^2 x - 1)$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{th}^2 x / (1 - \operatorname{th}^2 x)$$

Формулы перехода к половинному аргументу.

$$\operatorname{sh} x = 2 (\operatorname{th} (x / 2)) / (1 - \operatorname{th}^2 (x / 2))$$

$$\operatorname{ch} x = (1 + \operatorname{th}^2 (x / 2)) / (1 - \operatorname{th}^2 (x / 2))$$

$$\operatorname{th} x = (2 \operatorname{th} (x / 2)) / (1 + \operatorname{th}^2 (x / 2))$$

$$\operatorname{cth} x = (1 + \operatorname{th}^2 (x / 2)) / 2 \operatorname{th} (x / 2)$$

Формулы суммы и разности функций с разными аргументами.

$$\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} (x + y) / 2 \operatorname{ch} (x - y) / 2$$

$$\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} (x - y) / 2 \operatorname{ch} (x + y) / 2$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} (x + y) / 2 \operatorname{ch} (x - y) / 2$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} (x + y) / 2 \operatorname{sh} (x - y) / 2$$

Запоминалка.

Эти формулы также легко запомнить, как и тригонометрические.

Если складываются и вычитаются синусы, то функция меняется в произведении и нужный знак стоит под синусом, тот же самый.

Если складываются косинусы, то функция не меняется при сложении.

Это косинус при вычитании и синус при сложении.

И впереди минуса нигде не выскакивает, в отличие от тригонометрических функций.

Формулы суммы и разности тангенсов и котангенсов с разными аргументами.

$$\operatorname{th} x + \operatorname{th} y = \operatorname{sh} (x + y) / \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y$$

$$\operatorname{th} x - \operatorname{th} y = \operatorname{sh} (x - y) / \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y$$

$$\operatorname{cth} x + \operatorname{cth} y = \operatorname{sh} (x + y) / \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{cth} x - \operatorname{cth} y = \operatorname{sh} (y - x) / \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{th} x + \operatorname{cth} y = \operatorname{ch} (x + y) / \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{th} x - \operatorname{cth} y = -\operatorname{ch} (x - y) / \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y$$

$$\operatorname{cth} x - \operatorname{th} y = \operatorname{ch} (x - y) / \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y$$

Формулы суммы и разности аргументов функций.

$$\operatorname{sh} (x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{sh} (x - y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{ch} (x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{ch} (x - y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

Запоминалка.

Если это сумма или разность аргументов под синусом, то функции меняются; а знаки не меняются.

Если это сумма или разность аргументов под косинусом, то функции не меняются и знаки не меняются, в отличие от тригонометрических функций.

Формулы суммы и разности аргументов для тангенса и котангенса.

$$\operatorname{th} (x + y) = (\operatorname{th} x + \operatorname{th} y) / (1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y)$$

$$\operatorname{th} (x - y) = (\operatorname{th} x - \operatorname{th} y) / (1 - \operatorname{th} x \operatorname{th} y)$$

$$\operatorname{th} (x + y) = (\operatorname{cth} x \operatorname{cth} y + 1) / (\operatorname{cth} x + \operatorname{cth} y)$$

$$\operatorname{th} (x - y) = (\operatorname{cth} y - \operatorname{cth} x) / (\operatorname{cth} x \operatorname{cth} y - 1)$$

$$\operatorname{cth} (x + y) = (1 + \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y) / (\operatorname{cth} x + \operatorname{cth} y)$$

$$\operatorname{cth} (x - y) = (1 - \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y) / (\operatorname{cth} x - \operatorname{cth} y)$$

$$\operatorname{cth} (x + y) = (1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y) / (\operatorname{th} x + \operatorname{th} y)$$

$$\operatorname{cth} (x - y) = (\operatorname{th} x \operatorname{th} y - 1) / (\operatorname{th} y - \operatorname{th} x)$$

Формулы произведения функций.

$$\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = 1/2 ((\operatorname{ch} (x + y) - \operatorname{ch} (x - y)))$$

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = 1/2 ((\operatorname{ch} (x + y) + \operatorname{ch} (x - y)))$$

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = 1/2 ((\operatorname{sh} (x + y) + \operatorname{sh} (x - y)))$$

$$\operatorname{th} x \operatorname{th} y = (\operatorname{ch} (x + y) - \operatorname{ch} (x - y)) / (\operatorname{ch} (x + y) + \operatorname{ch} (x - y))$$

$$\operatorname{cth} x \operatorname{cth} y = (\operatorname{ch} (x + y) + \operatorname{ch} (x - y)) / (\operatorname{ch} (x + y) - \operatorname{ch} (x - y))$$

Формулы перехода от тангенса к синусу и косинусу двойного угла.

$$\operatorname{th} x = (\operatorname{ch} 2x - 1) / \operatorname{sh} 2x$$

$$\operatorname{th} x = \operatorname{sh} 2x / (1 + \operatorname{ch} 2x)$$

$$\operatorname{cth} x = \operatorname{sh} 2x / (\operatorname{ch} 2x - 1)$$

$$\operatorname{cth} x = (1 + \operatorname{ch} 2x) / \operatorname{sh} 2x$$

$$\operatorname{ch} 2x + \operatorname{sh} 2x = (\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x)^2$$

$$\operatorname{ch} 2x - \operatorname{sh} 2x = (\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x)^2$$

Формулы кратных углов.

$$\operatorname{sh} 3x = 4 \operatorname{sh}^3 x + 3 \operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{ch} 3x = 4 \operatorname{ch}^3 x - 3 \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{th} 3x = \operatorname{th} x (3 + \operatorname{th}^2 x) / (1 + 3 \operatorname{th}^2 x)$$

$$\operatorname{cth} 3x = (1 + 3 \operatorname{th}^2 x) / \operatorname{th} x (3 + \operatorname{th}^2 x)$$

$$\operatorname{sh} 5x = 16 \operatorname{sh}^5 x + 20 \operatorname{sh}^3 x + 5 \operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{ch} 5x = 16 \operatorname{ch}^5 x - 20 \operatorname{ch}^3 x + 5 \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{th} 5x = \operatorname{th} x (\operatorname{th}^4 x + 10 \operatorname{th}^2 x + 5) / (5 \operatorname{th}^4 x + 10 \operatorname{th}^2 x + 1)$$

Формулы половинного аргумента.

$$\operatorname{sh}^2 (x / 2) = (\operatorname{ch} x - 1) / 2$$

$$\operatorname{ch}^2 (x / 2) = (\operatorname{ch} x + 1) / 2$$

$$\operatorname{th} (x / 2) = \operatorname{sh} x / (\operatorname{ch} x + 1) = (\operatorname{ch} x - 1) / \operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{cth} (x / 2) = (\operatorname{ch} x + 1) / \operatorname{sh} x = \operatorname{sh} x / (\operatorname{ch} x - 1)$$

8)) Обратные гиперболические функции.

$\operatorname{arch} x$ - гиперболический ареакосинус.

$\operatorname{arsh} x$ - гиперболический ареасинус.

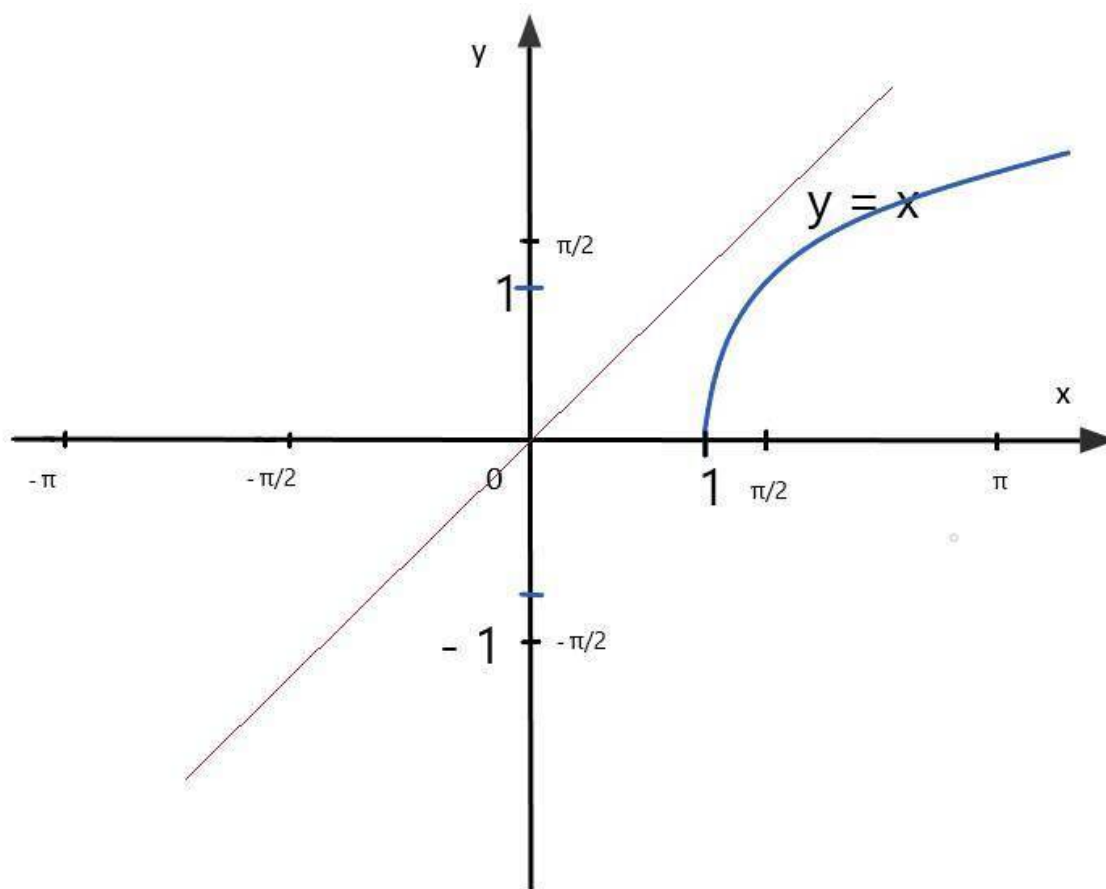
$\operatorname{arth} x$ - гиперболический ареатангенс.

$\operatorname{archth} x$ - гиперболический ареакотангенс.

Обратные гиперболические функции обозначаются $\operatorname{ag} \dots x$, так как ag обозначает area - площадь; а обратные тригонометрические функции обозначаются $\operatorname{agc} \dots x$, так как agc - обозначает дуга.

И говорится ареасинус, ареакосинус, ареатангенс, ареакотангенс или арсинус, аркосинус, артангенс, аркотангенс, если нужно покороче.

1) $y = \operatorname{arch} x$ - ареакосинус.

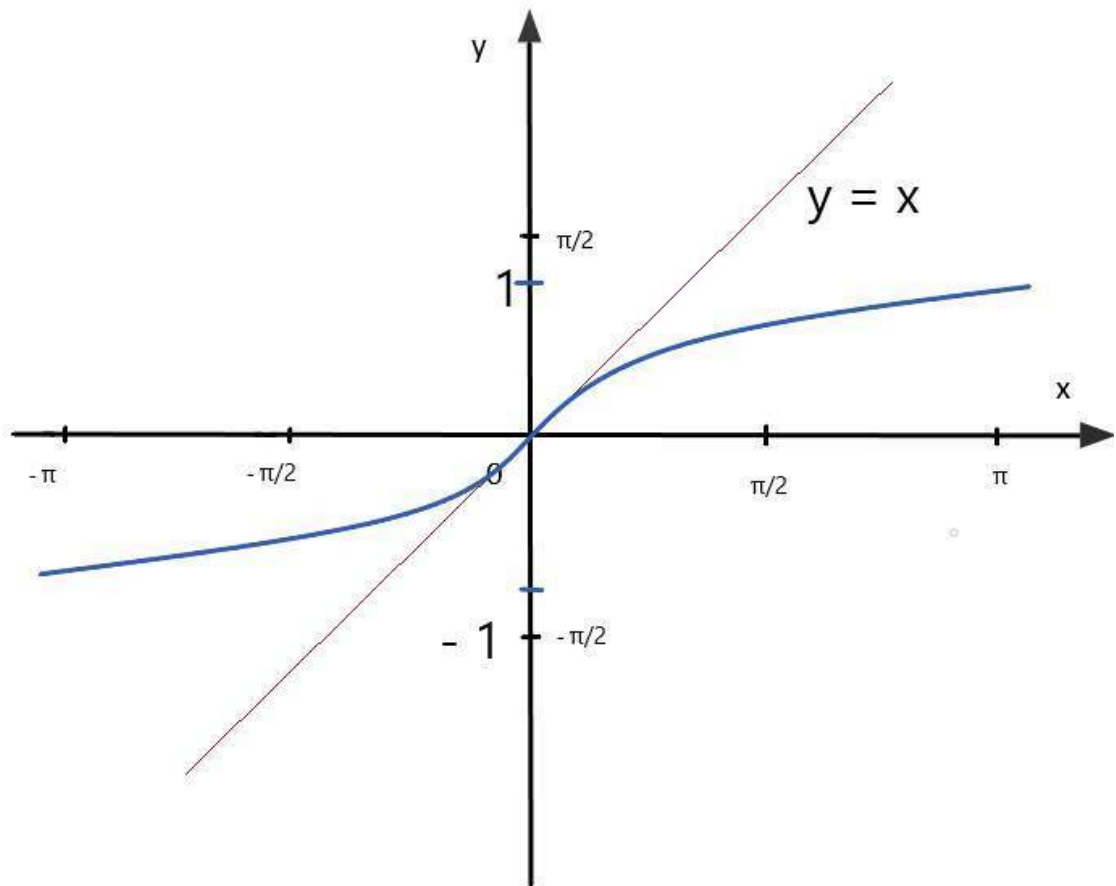


$D(f): x \in [1; +\infty)$

$E(f): y \in [0; +\infty)$

Возрастает $(1; +\infty)$

2) $y = \operatorname{arsh} x$ - ареасинус.



$D(f): x \in (-\infty; +\infty)$

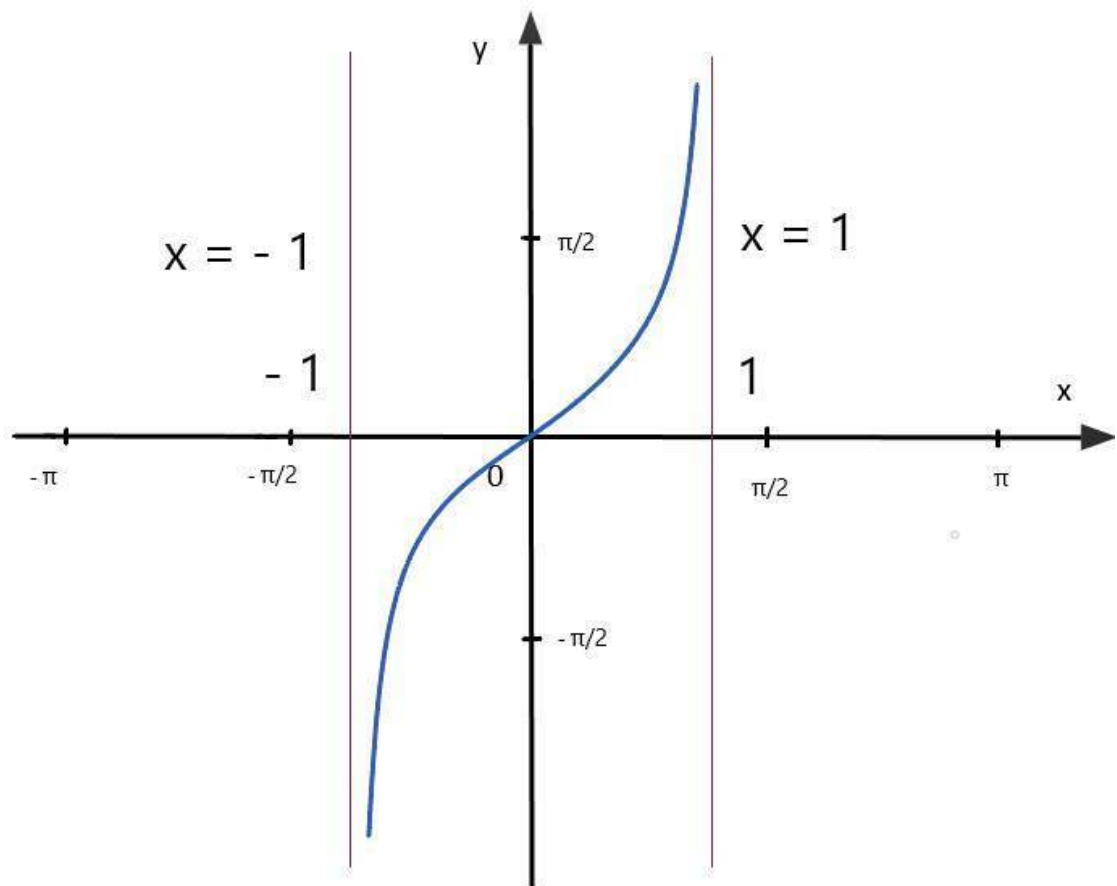
$E(f): y \in (-\infty; +\infty)$

Возрастает на $(-\infty; +\infty)$

Функция нечётная.

$\operatorname{arsh}(-x) = -\operatorname{arsh} x$

3) $y = \operatorname{arth} x$ - ареатангенс.



$D(f): x \in (-1; 1)$

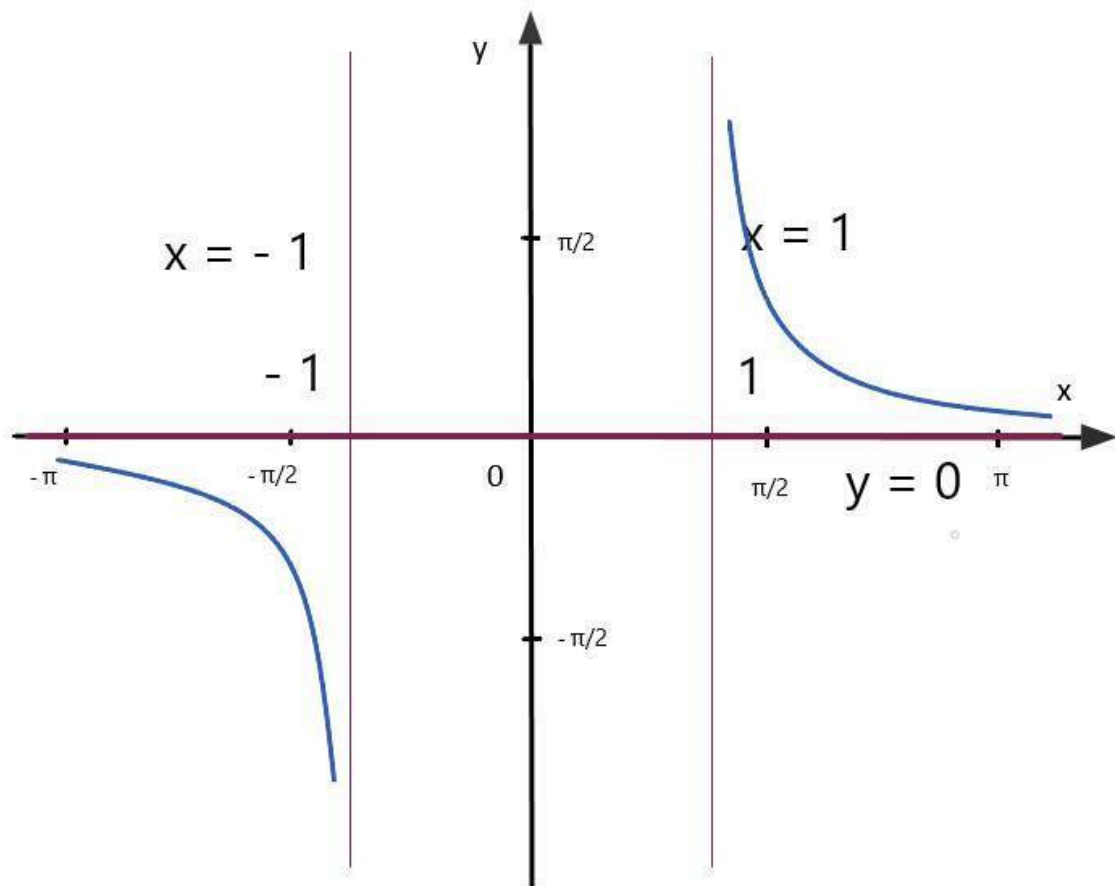
$E(f): y \in (-\infty; +\infty)$

Возрастает на $(-\infty; +\infty)$

Функция нечётная.

$\operatorname{arth}(-x) = -\operatorname{arth} x$

4) $y = \operatorname{arcth} x$ - ареакотангенс.



$D(f): x \in (-\infty; -1); (1; +\infty)$

$E(f): y \in (-\infty; 0); (0; +\infty)$

Убывает на $(-\infty; -1); (1; +\infty)$

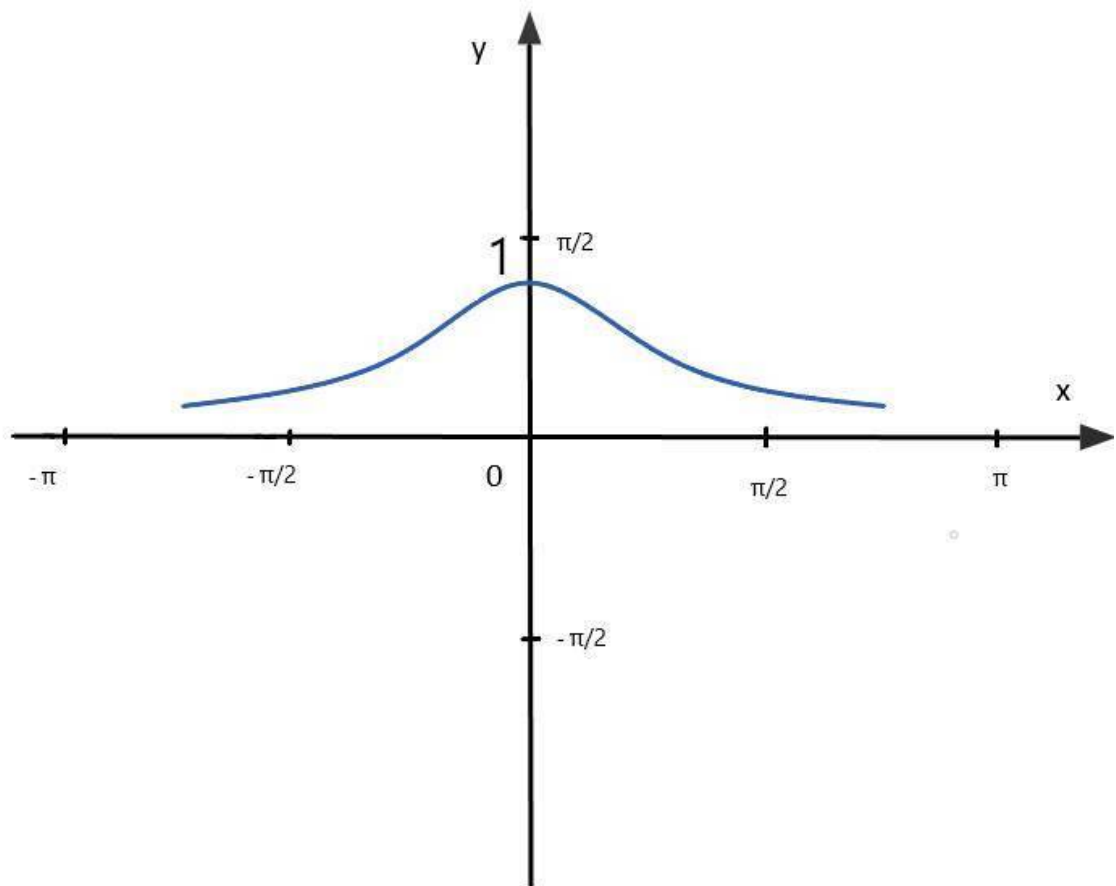
Функция нечётная.

$\operatorname{arcth}(-x) = -\operatorname{arcth} x$

Рассмотрим графики ещё двух гиперболических функций.

1) Гиперболический секанс - это единица делить на гиперболический косинус.

$\operatorname{sch} x = 1 / \operatorname{ch} x = 2 / (e^x + e^{-x})$



Функция чётная.

$$\operatorname{sch}(-x) = \operatorname{sch} x$$

Минус пропадает.

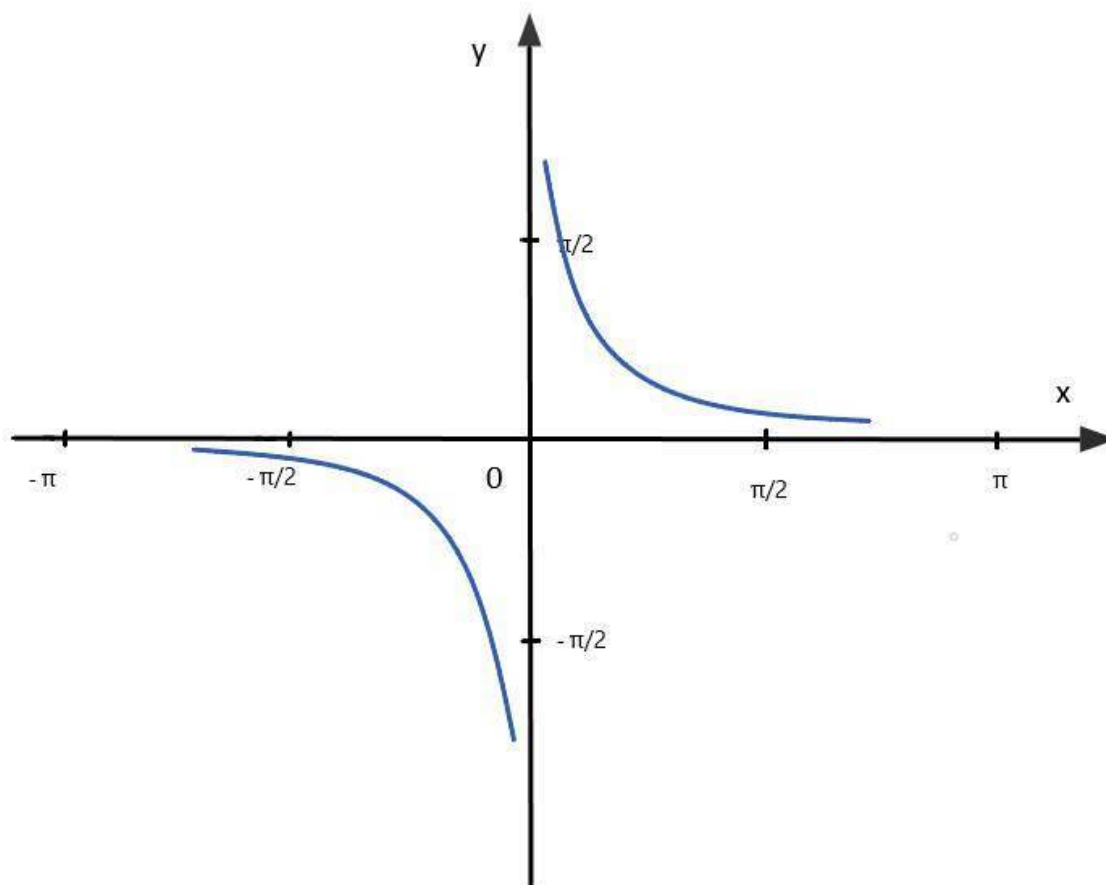
$$D(f): x \in (-\infty; +\infty)$$

$$E(f): y \in (0; +1]$$

Функция возрастает на $(-\infty; 0)$ и убывает на $(0; +\infty)$

2) Гиперболический косеканс - это единица делённая на гиперболический синус.

$$\operatorname{csch} x = 1 / \operatorname{sh} x = 2 / (e^x - e^{-x})$$



Функция нечётная.

$$\operatorname{csch}(-x) = -\operatorname{csch} x$$

Минус выносится за функцию.

$$D(f): x \in (-\infty; 0); (0; +\infty)$$

$$E(f): y \in (-\infty; 0); (0; +\infty)$$

9)) Основные тождества для обратных гиперболических функций.

$$\operatorname{sh}(\operatorname{arsh} a) = a$$

$$\operatorname{ch}(\operatorname{arch} a) = a$$

$$\operatorname{th}(\operatorname{arth} a) = a$$

$$\operatorname{cth}(\operatorname{atcth} a) = a$$

$$\operatorname{arch}(\operatorname{sh} x) = x$$

$$\operatorname{arch}(\operatorname{ch} x) = x$$

$$\operatorname{arth}(\operatorname{th} x) = x$$

$$\operatorname{arcth}(\operatorname{cth} x) = x$$

$$\operatorname{arch}(-a) = \operatorname{arch} a$$

$$\operatorname{arsh}(-a) = -\operatorname{arsh} a$$

$$\operatorname{arth}(-a) = -\operatorname{arth} a$$

$$\operatorname{arcth}(-a) = -\operatorname{arcth} a$$

$$\operatorname{sh}(\operatorname{arsh} x) = \sqrt{x^2 - 1}; |x| > 1$$

$$\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x) = \sqrt{x^2 + 1}; x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sh}(\operatorname{arth} x) = x / \sqrt{1 - x^2}; |x| < 1$$

$$\operatorname{ch}(\operatorname{arth} x) = 1 / \sqrt{1 - x^2}; 0 \leq x \leq 1$$

$$\operatorname{sh}(\operatorname{arcth} x) = 1 / \sqrt{x^2 - 1}; |x| > 1$$

$$\operatorname{ch}(\operatorname{arcth} x) = x / \sqrt{x^2 - 1}; x > 1$$

$$\operatorname{th}(\operatorname{arch} x) = \sqrt{(x^2 - 1)} / x; x \geq 1$$

$$\operatorname{th}(\operatorname{arsh} x) = x / \sqrt{(x^2 + 1)}; x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{cth}(\operatorname{arch} x) = x / \sqrt{(x^2 - 1)}; x > 1$$

$$\operatorname{cth}(\operatorname{arsh} x) = \sqrt{(x^2 + 1)} / x; x \neq 0$$

10)) Связь гиперболических функций с логарифмической.

$$1) \operatorname{arsh} x = \ln |x + \sqrt{(x^2 + 1)}|; x \in \mathbb{R}$$

$$2) \operatorname{arsh} x = \ln |x + \sqrt{(x^2 - 1)}|; x \geq 1$$

$$3) \operatorname{arth} x = 1/2 \ln |(1 + x) / (1 - x)|; |x| < 1$$

$$4) \operatorname{arch} x = 1/2 \ln |(x + 1) / (x - 1)|; |x| > 1$$

$$5) \ln x = \operatorname{arth} ((x^2 - 1) / (x^2 + 1)) = \operatorname{sh} ((x^2 - 1) / 2x) = \pm \operatorname{arch} ((x^2 + 1) / 2x)$$

$$6) \operatorname{arth} x = \operatorname{arsh} (x / \sqrt{(1 - x^2)}) = \pm \operatorname{arch} (1 / \sqrt{(1 - x^2)})$$

$$7) \operatorname{arsh} x = \operatorname{arth} (x / \sqrt{(1 + x^2)}) = \operatorname{arsh} \sqrt{(1 + x^2)}$$

$$8) \operatorname{arch} x = \operatorname{larsh} \sqrt{(x^2 - 1)} = \operatorname{larth} \sqrt{(x^2 - 1)} / |x|$$

11)) Производные гиперболических функций.

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

$$(\operatorname{th} x)' = 1 / \operatorname{ch}^2 x$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -1 / \operatorname{sh}^2 x$$

$$(\operatorname{arsh} x)' = 1 / \sqrt{(x^2 + 1)}$$

$$(\operatorname{arch} x)' = 1 / \sqrt{(x^2 - 1)}$$

$$(\operatorname{arth} x)' = 1 / (1 - x^2)$$

$$(\operatorname{arch} x)' = 1 / (x^2 - 1)$$

$$(\ln \operatorname{ch} x)' = \operatorname{th} x$$

$$(\ln \operatorname{sh} x)' = \operatorname{cth} x$$

$$(\operatorname{arsh} (x / a))' = 1 / \sqrt{(x^2 + a^2)}$$

$$(\operatorname{arch} (x / a))' = 1 / \sqrt{(x^2 - a^2)}$$

$$(\operatorname{arth} (x / a))' = a / (a^2 - x^2)$$

$$(\operatorname{arch} (x / a))' = a / (a^2 - x^2)$$

$$(\operatorname{arsch} (x / a))' = -a / x \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

$$(\operatorname{arsh} (x / a))' = -a / x \sqrt{(a^2 + x^2)}$$

$$(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{cthx} \operatorname{csch} x$$

$$(\operatorname{csh} x)' = -\operatorname{th} x \operatorname{sch} x$$

12)) Первообразные гиперболических функций.

$$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int dx / \operatorname{ch}^2 x = \operatorname{th} x + C$$

$$\int dx / \operatorname{sh}^2 x = -\operatorname{cth} x + C$$

$$\int dx / \sqrt{(x^2 + 1)} = \operatorname{arsh} x + C$$

$$\int dx / \sqrt{(x^2 - 1)} = \operatorname{arch} x + C$$

$$\int dx / (1 - x^2) = \operatorname{arth} x + C$$

$$\int dx / (x^2 - 1) = -\operatorname{arch} x + C$$

$$\int \operatorname{th} x \, dx = \ln |\operatorname{ch} x| + C$$

$$\int \operatorname{cth} x \, dx = \ln |\operatorname{sh} x| + C$$

$$\int dx / \sqrt{(x^2 + a^2)} = \operatorname{arsh} (x / a) + C$$

$$\int dx / \sqrt{(x^2 - a^2)} = \operatorname{arch} (x / a) + C$$

$$\int dx / (a^2 - x^2) = 1/a \operatorname{arth} (x / a) + C$$

$$\int dx / (a^2 - x^2) = 1/a \operatorname{arch} (x / a) + C$$

$$\int dx / x \sqrt{(a^2 - x^2)} = -1/a \operatorname{arsch} (x / a) + C$$

$$\int dx / x \sqrt{(a^2 + x^2)} = -1/a \operatorname{arsh} (x / a) + C$$

$$\int \operatorname{cth} x \operatorname{csch} x \, dx = -\operatorname{csch} x + C$$

$$\int \operatorname{th} x \operatorname{sch} x \, dx = -\operatorname{sch} x + C$$

13)) Интегралы перехода от гиперболических функций к логарифмическим функциям.

$$\int dx / \sqrt{x^2 + 1} = \operatorname{arsh} x + C = \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}| + C; x \in \mathbb{R}$$

$$\int dx / \sqrt{x^2 - 1} = \operatorname{arch} x + C = \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + C; x \geq 1$$

$$\int dx / (1 - x^2) = \operatorname{arth} x + C = 1/2 \ln |(1 + x) / (1 - x)| + C; |x| < 1$$

$$\int dx / (x^2 - 1) = -\operatorname{arth} x + C = 1/2 \ln |(x - 1) / (x + 1)| + C; |x| > 1$$

$$\int dx / \sqrt{x^2 + a^2} = \operatorname{arsh} (x/a) + C = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C; x/a > -1; a \neq 0$$

$$\int dx / \sqrt{x^2 - a^2} = \operatorname{arch} (x/a) + C = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C; x/a > 1; a \neq 0$$

$$\int dx / (a^2 - x^2) = 1/a \operatorname{arth} (x/a) + C = 1/(2a) \ln |(a + x) / (a - x)| + C; x/a < 1; a \neq 0$$

$$\int dx / (x^2 - a^2) = 1/a \operatorname{arth} (x/a) + C = 1/(2a) \ln |(a - x) / (a + x)| + C; x/a > 1; a \neq 0$$

$$\int \operatorname{csch} x \, dx = \ln |\operatorname{th} (x/2)| + C = \ln |(e^x - 1) / (e^x + 1)| + C$$

$$\int \operatorname{sch} x \, dx = 2 \operatorname{arctg} \operatorname{th} (x/2) + C = 2 \operatorname{arctg} e^x + C$$

14)) Примеры интегралов с гиперболическими функциями.

Интегрирование гиперболических функций непосредственно.

Пример один.

$$\int dx / \operatorname{ch} x =$$

Умножим и поделим интеграл на гиперболический косинус.

$$= \int \operatorname{ch} x \, dx / \operatorname{ch}^2 x =$$

Внесем из числителя функцию под дифференциал. Найдём её первообразную.

$$= \int d \operatorname{sh} x / \operatorname{ch}^2 x =$$

Заменим по основному гиперболическому тождеству косинус на выражение с синусом.

$$= \int d \operatorname{sh} x / (1 + \operatorname{sh}^2 x) =$$

Сделаем замену переменной.

$$\text{Пусть } \operatorname{sh} x = t$$

$$= \int dt / (1 + t^2) =$$

Это табличный интеграл.

Найдём его по таблице первообразных.

$$= \operatorname{arctg} t + C =$$

Сделаем обратную замену.

$$= \operatorname{arctg} \operatorname{sh} x + C$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \operatorname{sh} x + C$

Пример два.

$$\int dx / \operatorname{sh} x =$$

Умножим и поделим интеграл на гиперболический синус.

$$= \int \operatorname{sh} x \, dx / \operatorname{sh}^2 x =$$

Внесём из числителя функцию под дифференциал.

Найдём её первообразную.

$$= \int d \operatorname{ch} x / \operatorname{sh}^2 x =$$

Заменим по основному гиперболическому тождеству синус на выражение с гиперболическим косинусом.

$$= \int d \operatorname{ch} x / (\operatorname{ch}^2 x - 1) =$$

Сделаем замену переменной.

$$\text{Пусть } \operatorname{ch} x = t$$

$$= \int dt / (t^2 - 1) =$$

Это табличный интеграл.

Найдём его по таблице первообразных.

$$= 1/2 \ln |(t - 1) / (t + 1)| + C =$$

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «Литрес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на Литрес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.