



Василиса Волконская

Сборник правил
по геометрии 10 -
11 класс.

Василиса Волконская

Сборник правил по геометрии 10 - 11 класс.

<https://litres.ru/74515157>

SelfPub; 2026

Аннотация

В серии этих книг собрано много методик по решению и школьной математики и высшей математики. В книгах подробно разобраны различные примеры, для сдачи экзаменов и в школе и в университете. Собраны многие правила и методики решения задач. Материал написан доступно для любого среднего ученика, который хочет понять математику, а не бездумно ее списать.

Василиса Волконская

Сборник правил по геометрии 10 - 11 класс.

Содержание:

- 1) Основные понятия стереометрии.
- 2) Аксиомы стереометрии.
- 3) Некоторые следствия из аксиом.
- 4) Параллельные прямые в пространстве.
- 5) Скрещивающиеся прямые.
- 6) Параллельность прямой и плоскости.
- 7) Теорема о двух скрещивающихся прямых и плоскости.
- 8) Углы в пространстве.
- 9) Угол между скрещивающимися прямыми.
- 10) Плоскости в пространстве.
- 11) Перпендикулярность прямых в пространстве.
- 12) Плоскость и прямая в пространстве.
- 13) Расстояния в пространстве.
- 14) Теорема о трёх перпендикулярах.
- 15) Обратная теорема для теоремы о трёх перпендикулярах.
- 16) Угол между прямой и плоскостью.
- 17) Теоремы о проекциях и наклонных.
- 18) Углы в пространстве.

- 19) Признак перпендикулярности двух плоскостей.
- 20) Многогранники.
- 21) Призма.
- 22) Параллелепипед.
- 23) Куб.
- 24) Свойства параллелепипеда.
- 25) Площади поверхности различных призм.
- 26) Пирамида.
- 27) Тетраэдр.
- 28) Площадь поверхности пирамиды.
- 29) Свойства любой пирамиды.
- 30) Пространственная теорема Пифагора.
- 31) Усечённая пирамида.
- 32) Площадь поверхности усечённой пирамиды.
- 33) Сечение пирамиды.
- 34) Подобные фигуры в пространстве. Коэффициент подобия.
- 35) Цилиндрическая поверхность.
- 36) Цилиндр.
- 37) Основные сечения цилиндра.
- 38) Площадь поверхности цилиндра.
- 39) Коническая поверхность.
- 40) Конус.
- 41) Площадь поверхности конуса.
- 42) Сечения конуса.
- 43) Усечённый конус.

44) Сечения усечённого конуса.

45) Площадь поверхности усечённого конуса.

46) Сфера.

47) Шар.

48) Уравнение сферы.

49) Плоскость и сфера.

50) Прямая и сфера.

51) Касательная плоскость к сфере.

52) Касательная прямая к сфере.

53) Теорема об отрезках касательных или о сфере, вписанной в угол.

54) Теоремы о хорде и радиусе сферы.

55) Теоремы о пересекающихся секущих в сфере.

56) Площадь поверхности сферы.

57) Объемы тел.

1)) Основные понятия стереометрии.

Стереометрия.

Планиметрия - это раздел геометрии, который изучает свойства фигур на плоскости.

Стереометрия - это раздел геометрии, который изучает свойства фигур в пространстве.

Аксиома - это утверждение, которое принимается без доказательства.

Теорема - это утверждение, которое нужно доказывать при помощи аксиом или ранее доказанных теорем.

Следствие это теорема, которая выходит из другой теоремы.

Прямая теорема - это свойство какого-либо понятия.

Обратная теорема - это признак какого-либо понятия.

Понятие - это форма логического мышления, образ, фиксирующий общие и существенные признаки и свойства предметов и явлений и отношений между ними.

Правило - это множество, которое отвечает определённо-му понятию.

Основные геометрические фигуры (понятия).

Точка - это самая простая геометрическая фигура.

У геометрической точки нет длины, площади, объёма или других размерных характеристик.

Прямая - это ровная линия, которая не имеет ни начала, ни конца и состоит из множества точек.

Плоскость - это поверхность, содержащая полностью каждую прямую, соединяющую любые две её точки.

Пространство - это множество точек, в котором выполняется система аксиом стереометрии, описывающая свойства точек, прямых и плоскостей.

Отрезок - это часть прямой, ограниченная двумя точками.

Луч - это часть прямой, которая имеет начало и не имеет конца.

Угол - это геометрическая фигура, состоящая из двух лучей выходящих из одной точки. Точка является вершиной угла.

Полуплоскость - это множество точек плоскости, лежащих по одну сторону от некоторой прямой на этой плоскости.

Полупространство - это множество точек пространства, лежащих по одну сторону от некоторой плоскости в этом пространстве.

Двугранный угол - это фигура, образованная прямой и двумя полуплоскостями с общей границей в виде этой прямой, не принадлежащей ни одной плоскости.

Линейный угол двугранного угла - это угол образованный двумя перпендикулярами, опущенными в одну точку, лежащую на прямой, которая является ребром двугранного угла.

Полуплоскости образующие двугранный угол называются гранями двугранного угла.

Общая прямая двух полуплоскостей, образующих двугранный угол называется ребром двугранного угла.

Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.

2))Аксиомы стереометрии.

Аксиомы принадлежности.

1. Каждой прямой принадлежит, по крайней мере, две точки.

2. Каждой плоскости принадлежит, по крайней мере, три точки.

3. Имеются, по крайней мере, три точки, не лежащие на одной прямой.

4. Имеются, по крайней мере, четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

5. Через любые две точки проходит прямая и при том только одна.

6. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна.

7. Если две точки прямой лежат в данной плоскости, то и все точки прямой лежат в данной плоскости.

8. Из трёх точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими точками.

9. Каждая точка прямой разделяет её на две части (два луча) так, что любые две точки одного и того же луча лежат по одну сторону от точки. А любые две точки разных лучей лежат по разные стороны от точки.

10. Каждая прямая разделяет плоскость на две части (две полуплоскости) так, что любые две точки одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от прямой. А любые две точки разных полуплоскостей лежат по разные стороны от прямой.

Прямая, называется границей полуплоскостей.

11. Если две прямые имеют одну общую точку, то они пересекаются в этой точке.

12. Если две полуплоскости имеют одну общую прямую и они не совпадают, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

13. Каждая плоскость разделяет пространство на две ча-

сти (два полупространства) так, что любые две точки одного и того же полупространства лежат по одну сторону от плоскости. А любые две точки разных полупространств лежат по разные стороны от плоскости.

При этом точки плоскости не принадлежат ни одному из полупространств.

Плоскость называется границей каждого из полупространств.

Аксиомы наложения и равенства фигур.

14. Если при наложении совмещаются концы отрезков, то совмещаются и сами отрезки.

15. На любом луче от его начала можно отложить отрезок равный данному, и притом только один.

16. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол равный данному и при том только один.

17. Два равных угла, лежащие в плоскости, которые являются границами полупространств, можно совместить наложением так, что при этом совместятся полупространства.

Причём это можно сделать двумя способами:

В первом случае второй угол наложится на первый угол, как есть.

Во втором случае второй угол перевернётся и наложится на первый угол другими сторонами.

18. Любая фигура равна сама себе.

19. Если первая фигура равна второй фигуре, то вторая фигура равна первой фигуре.

20. Если первая фигура равна второй фигуре, а вторая фигура равна третьей фигуре, то первая фигура равна третьей фигуре.

Аксиомы измерения отрезков (длины).

21. При выбранной единице измерения отрезков, длина каждого отрезка выражается положительным числом.

22. При выбранной единице измерения отрезков, для любого положительного числа существует отрезок, длина которого выражается этим числом.

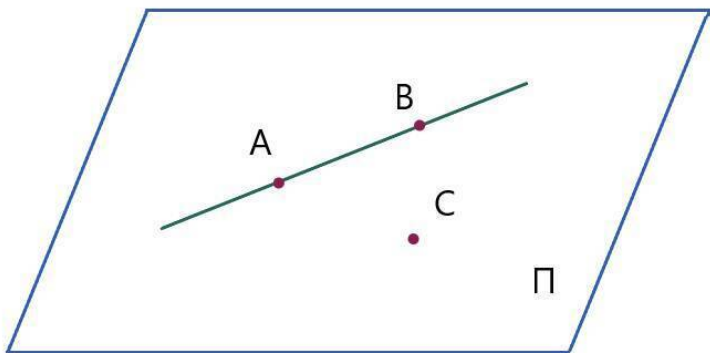
Аксиома параллельности.

23. В любой плоскости, через точку, не лежащую на данной прямой проходит только одна прямая параллельная данной.

3)) Некоторые следствия из аксиом.

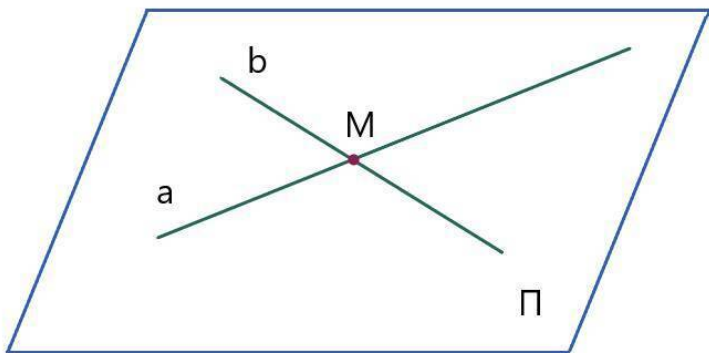
Первая теорема.

Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость и при том только одна.



Вторая теорема.

Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна.



Определение - это введение нового понятия или объекта. Математическое рассуждение об элементарных, либо ранее определённых понятиях.

4)) Параллельные прямые в пространстве.

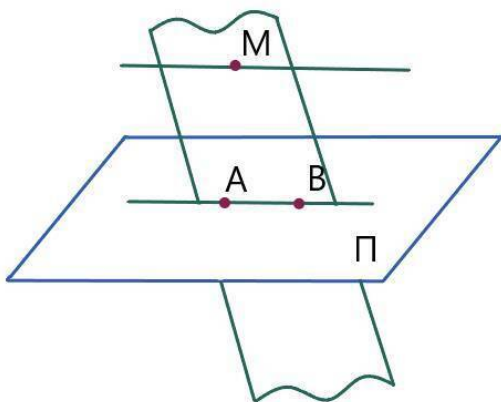
4. 1 Определение параллельных прямых.

Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Теорема о параллельных прямых.

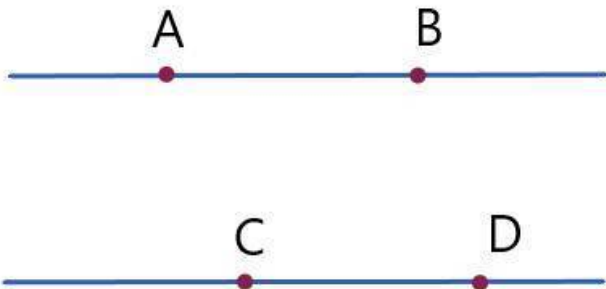
Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая параллельная данной и притом

ТОЛЬКО ОДНА.



Определение.

1. Два отрезка параллельны, если они лежат на параллельных прямых.



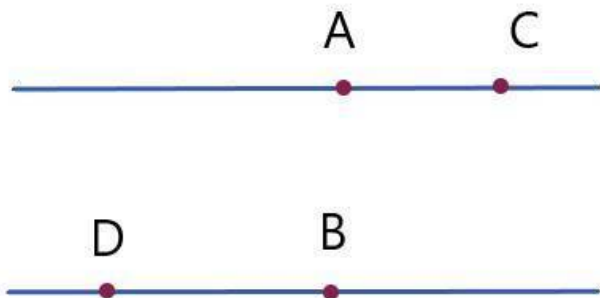
2. Отрезок параллелен прямой, если он лежит на параллельной прямой для данной прямой.

$$AB \parallel a$$



3. Два луча параллельны, если они лежат на параллельных прямых.

$[AC) \parallel [BD)$



Введём такие обозначения.

(AB) - прямая.

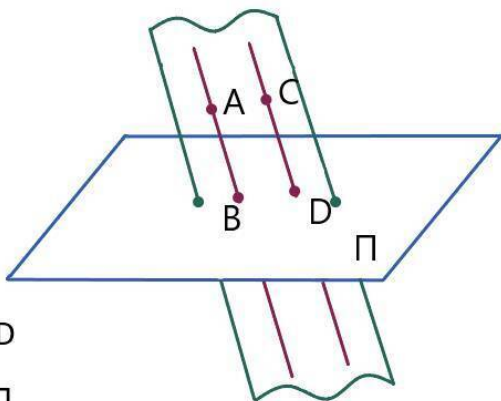
$[AB]$ - отрезок.

$\overrightarrow{AB}$ - луч с началом в точке A.

4. 2 Лемма о параллельных прямых.

Лемма - это теорема необходимая для дальнейшего изложения какой-либо теоремы.

Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.



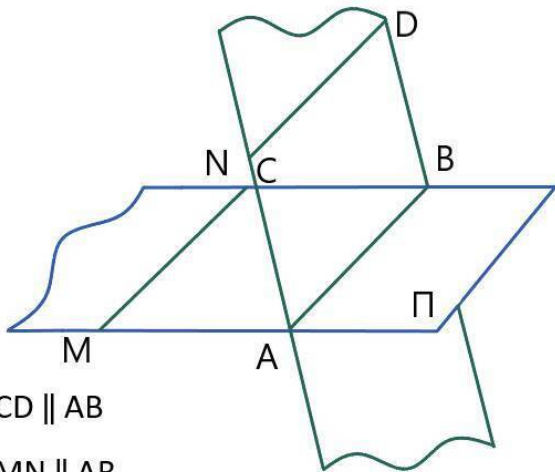
$$AB \parallel CD$$

$$AB \cap \Pi$$

$$\Rightarrow CD \cap \Pi$$

4. 3 Теорема о трёх параллельных прямых в пространстве.

Если в пространстве две прямые параллельны третьей, то они параллельны.



$CD \parallel AB$

$MN \parallel AB$

$\Rightarrow CD \parallel MN$

5)) Скрещивающиеся прямые.

5. 1 Расположение прямых на плоскости и в пространстве.

Планиметрия (на плоскости).

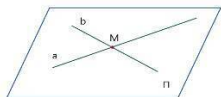
1. Прямые совпадают.

Бесконечно много общих точек.



2. Прямые пересекаются.

Одна общая точка.



$$a \cap b = M$$

Прямые параллельны.

Нет общих точек.



$$a \parallel b$$

Стереометрия (в пространстве).

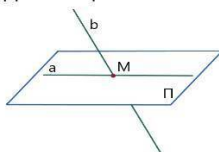
1. Прямые совпадают.

Бесконечно много общих точек.



2. Прямые пересекаются.

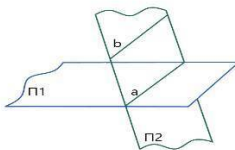
Одна общая точка.



$$a \cap b = M$$

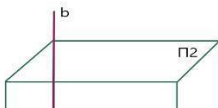
3. Прямые параллельны.

Нет общих точек.



4. Прямые скрещиваются.

Нет общих точек.

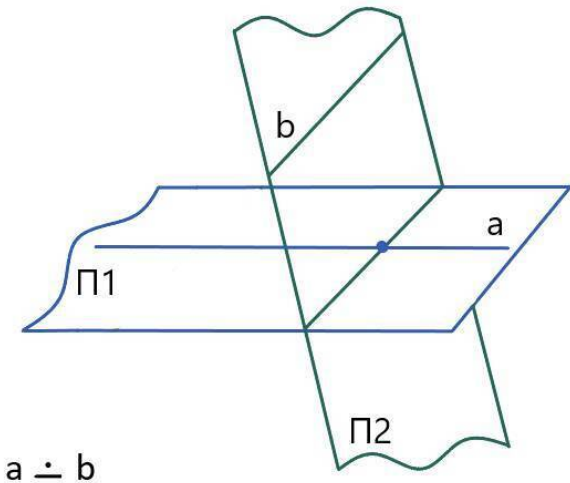


$a \cdot b$

Значок обозначает, что прямые скрещиваются.

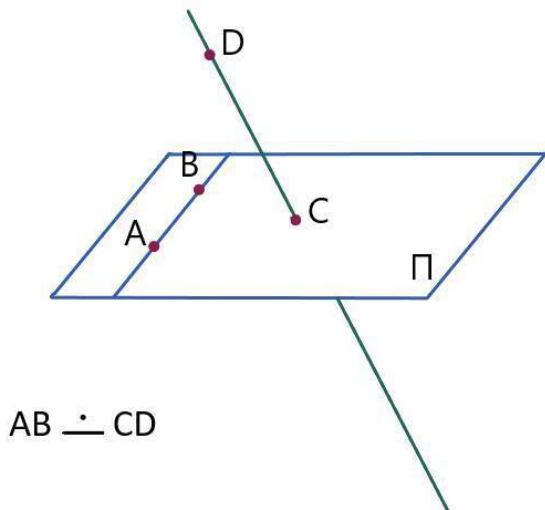
5. 2 Определение скрещивающихся прямых.

Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.



Теорема (признак скрещивающихся прямых).

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на данной прямой, то эти прямые скрещиваются.



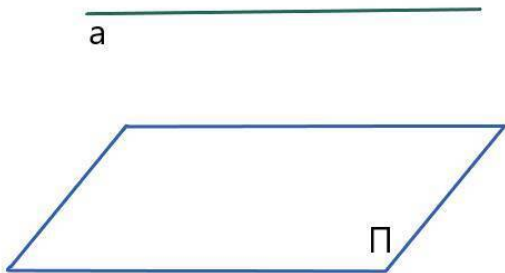
$$AB \parallel CD$$

6)) Параллельность прямой и плоскости.

Определение параллельной прямой и плоскости.

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

$\Pi \parallel a$



Теорема (признак параллельности прямой и плоскости).

Если прямая, не лежащая в данной плоскости параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

$a \in \Pi$



$a \parallel b$

$\Rightarrow b \parallel \Pi$



Теорема.

Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

$AB \in \Pi$

$AB \parallel \Pi_1$

$\Pi_1 \cap \Pi_2 = CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

Теорема.

Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то и другая прямая также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.

$a \parallel b$



$a \parallel \Pi$

$\Rightarrow b \in \Pi$



$a \parallel b$



$a \parallel \Pi$

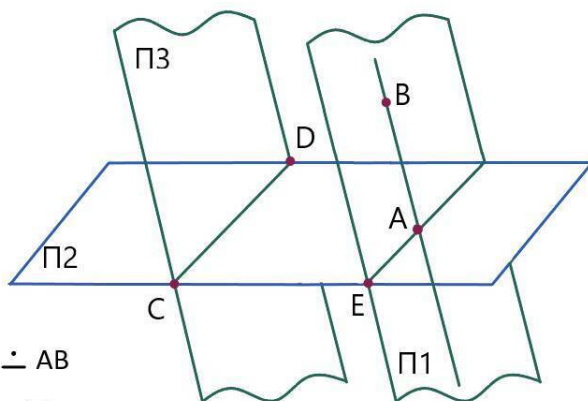


$\Rightarrow b \parallel \Pi$



7)) Теорема о двух скрещивающихся прямых и плоскости.
Через каждую из двух скрещивающихся прямых, прохо-

дит плоскость параллельная другой прямой; и при том только одна.



$$CD \parallel AB$$

$$AB \in \Pi_1$$

$$CD \in \Pi_3$$

$$\Rightarrow \Pi_1 \parallel \Pi_3$$

$$\Pi_3 \parallel AB$$

8) Углы в пространстве.

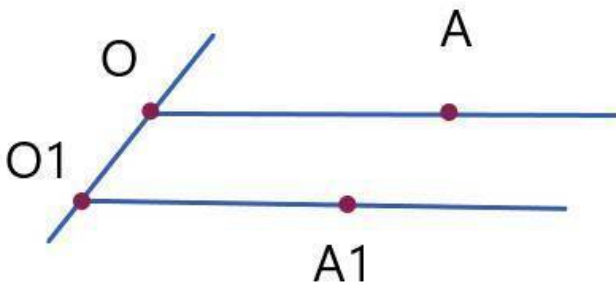
8. 1 Углы с сонаправленными сторонами.

Два луча, лежащие на одной прямой называются сонаправленными, если они совпадают или один из них содержит другой.

ОА и О1А - сонаправленные лучи.

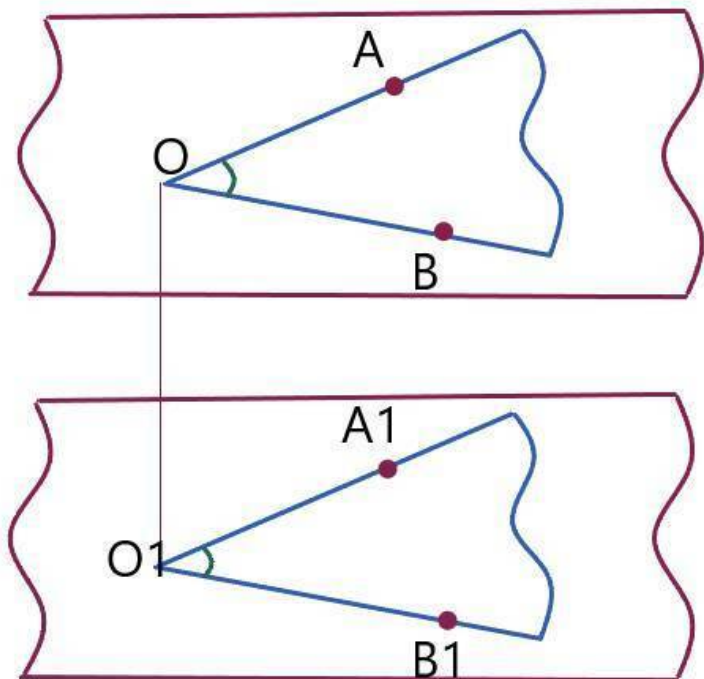


Два луча не лежащие на одной прямой называются сонаправленными, если они параллельны и лежат в одной полуплоскости, с границей, проходящей через начало этих лучей.
OA и O1 A1 - сонаправленные лучи.



8. 2 Теорема о равных углах.

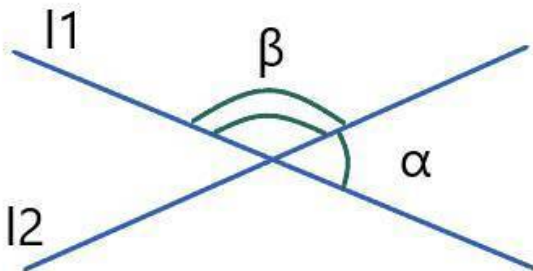
Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.



$$\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$$

8. 3 Угол между прямыми.

Любые две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости образуют четыре неразвёрнутых угла.

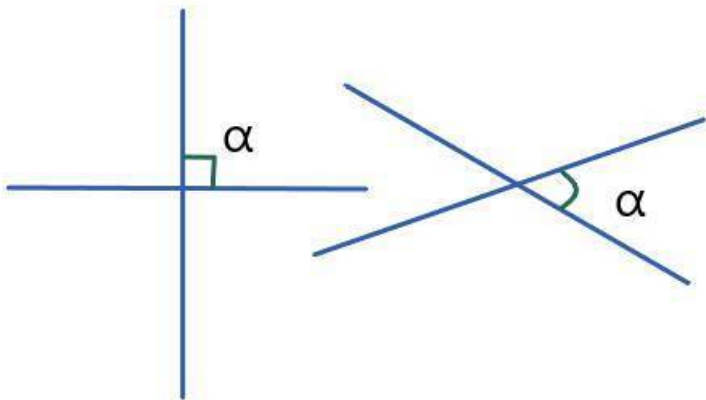


Пусть α тот из углов, который не превосходит любого из трёх остальных.

$$0 < \alpha \leq 90$$

Тогда говорят, что угол между пересекающимися прямыми равен α .

За угол между двумя пересекающимися прямыми, мы берём меньший или равный угол другому смежному углу.



При пересечении двух прямых на плоскости образуются углы:

1. Вертикальные.

Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого угла.

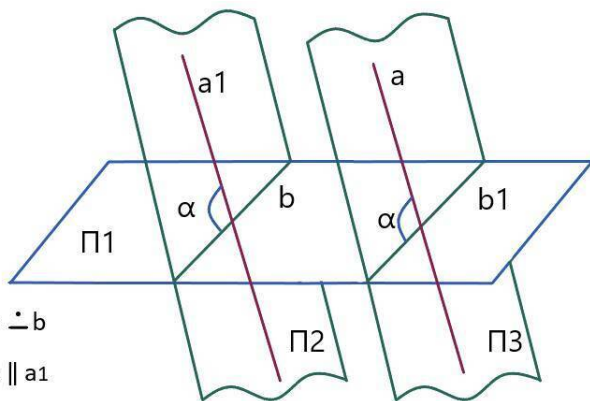
2. Смежные.

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются смежными.

9)) Угол между скрещивающимися прямыми.

Определение угла между скрещивающимися прямыми.

Угол между скрещивающимися прямыми, равен углу между прямыми параллельными заданным прямым; и лежащим в одной плоскости.



$$a \perp b$$

$$a \parallel a_1$$

$$a_1, b_2 \in \Pi_2$$

$$\angle(a_1, b) = \alpha$$

Или

$$b \parallel b_1$$

$$b_1, a \in \Pi_3$$

$$\angle(a, b_1) = \alpha$$

10)) Плоскости в пространстве.

10.1 Расположение плоскостей в пространстве.

Плоскости совпадают.

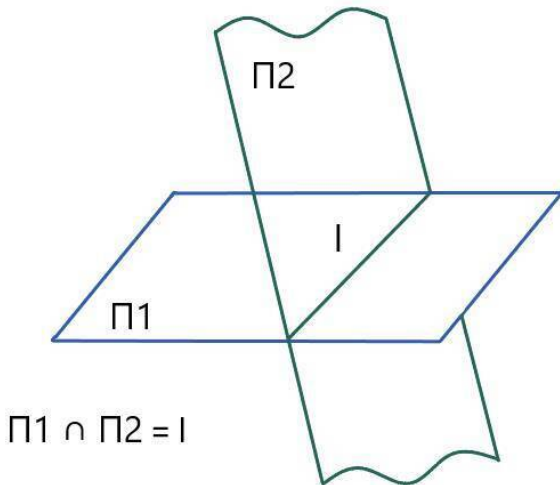
Имеют бесконечно много общих точек.



$$\Pi_1 = \Pi_2$$

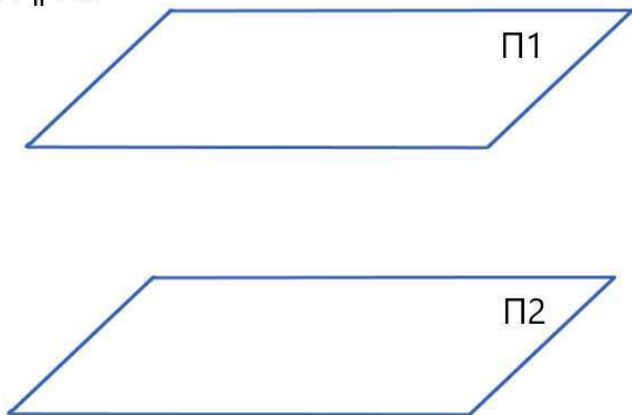
Плоскости пересекаются.

Имеют бесконечно много общих точек, которые лежат на их общей прямой.



Плоскости не пересекаются, то есть параллельны.
Не имеют общих точек.

$\Pi_1 \parallel \Pi_2$



10. 2 Определение параллельных плоскостей.

Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Теорема (первый признак параллельности плоскостей).

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости, соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

$$a \cap b = M$$

$$a_1 \cap b_1 = M_1$$

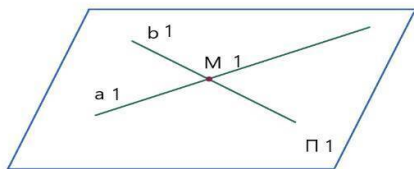
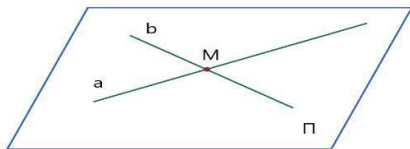
$$a, b \in \Pi$$

$$a_1, b_1 \in \Pi_1$$

$$a \parallel a_1$$

$$b \parallel b_1$$

$$\Rightarrow \Pi \parallel \Pi_1$$



Теорема (второй признак параллельности плоскостей).

Если две плоскости параллельны третьей плоскости, то они параллельны.

$\Pi_1 \parallel \Pi_2$

$\Pi_3 \parallel \Pi_2$

$\Rightarrow \Pi_1 \parallel \Pi_3$



10. 3 Свойства параллельных плоскостей.

1. Теорема.

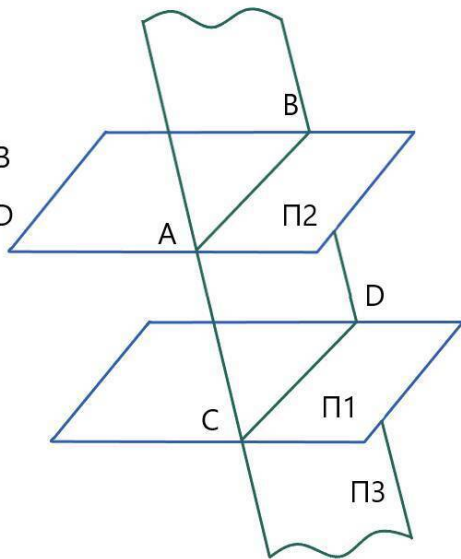
Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

$$\Pi_1 \parallel \Pi_2$$

$$\Pi_2 \cap \Pi_3 = AB$$

$$\Pi_1 \cap \Pi_3 = CD$$

$$\Rightarrow AB \parallel CD$$



2. Теорема.

Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями равны.

$\Pi_1 \parallel \Pi_2$

$AB \parallel CD$

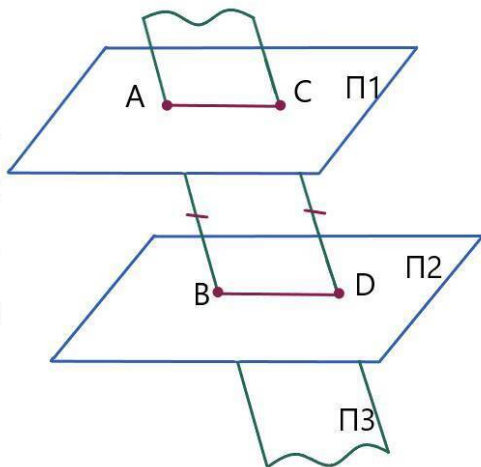
$AB \cap \Pi_1 = A$

$CD \cap \Pi_1 = C$

$AB \cap \Pi_2 = B$

$CD \cap \Pi_2 = D$

$\Rightarrow AB = CD$



3. Теорема.

Если прямая пересекает плоскость, то она пересекает так же любую плоскость параллельную данной.

a – прямая.

$$a \cap \Pi_1 = A$$

$$\Pi_1 \parallel \Pi_2 \parallel \Pi_3$$

$$\Rightarrow a \cap \Pi_2 = B$$

$$a \cap \Pi_3 = C$$

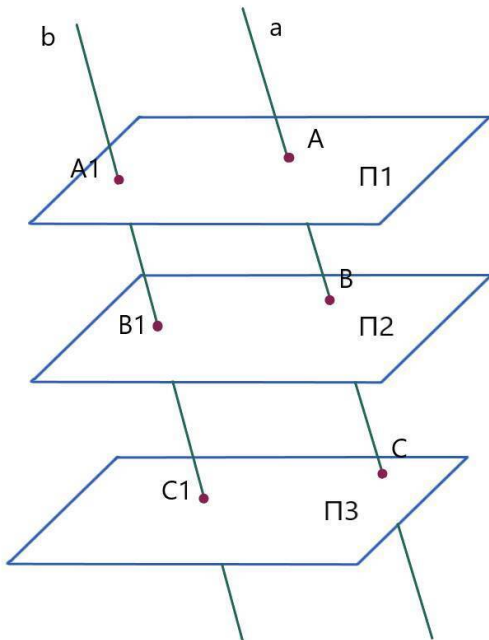
b – прямая.

$$b \cap \Pi_1 = A_1$$

$$\Pi_1 \parallel \Pi_2 \parallel \Pi_3$$

$$\Rightarrow b \cap \Pi_2 = B_1$$

$$b \cap \Pi_3 = C_1$$



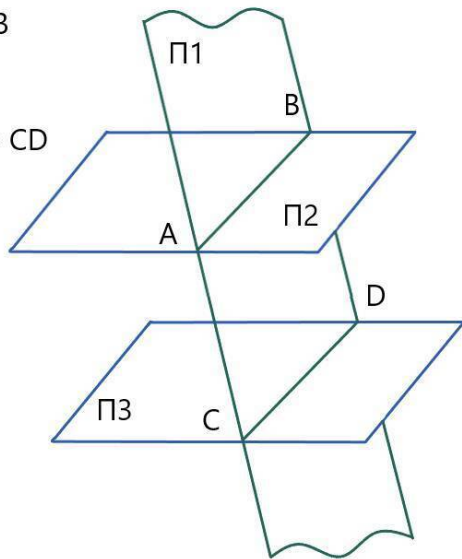
4. Теорема.

Если плоскость пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую плоскость.

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 = AB$$

$$\Pi_2 \parallel \Pi_3$$

$$\Rightarrow \Pi_1 \cap \Pi_3 = CD$$



5. Теорема.

Через точку, не лежащую в плоскости проходит плоскость параллельная данной плоскости и притом только одна.

$A \notin \Pi$

$A \in \Pi_1$

$\Pi_1 \parallel \Pi$



11)) Прямые в пространстве.

11.1 Перпендикулярность прямых в пространстве.

Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° .

11.2 Прямые в пространстве могут быть:

1) Прямые совпадают.

2) Прямые параллельны.

3) Прямые пересекаются.

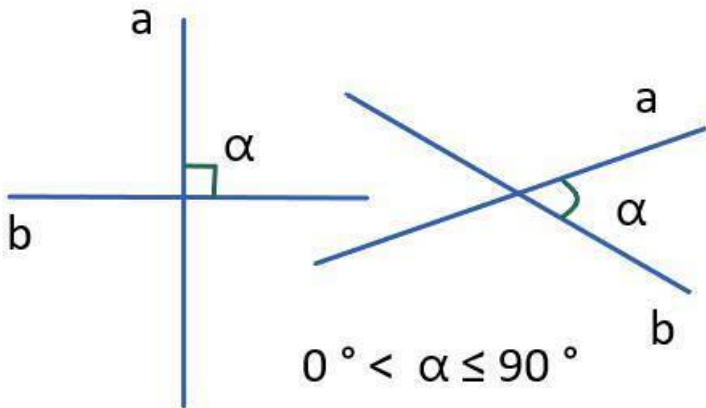
4) Прямые скрещиваются.

1) Если прямые пересекаются, то угол между ними мень-

ший или равный другому смежному углу.

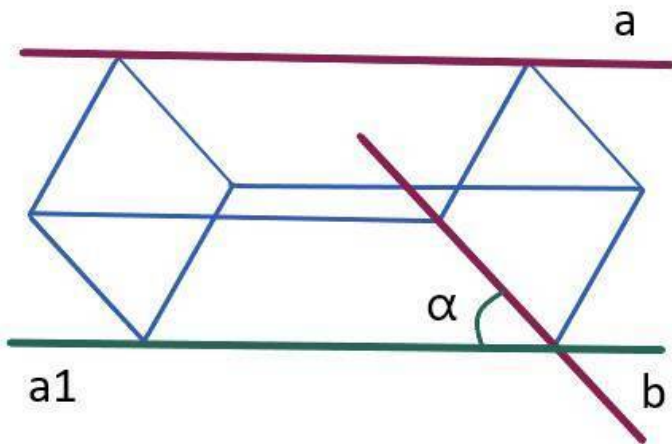
Если смежные углы равны, то они равны 90° .

Если прямые пересекаются и между ними угол равен 90° , то они перпендикулярны.

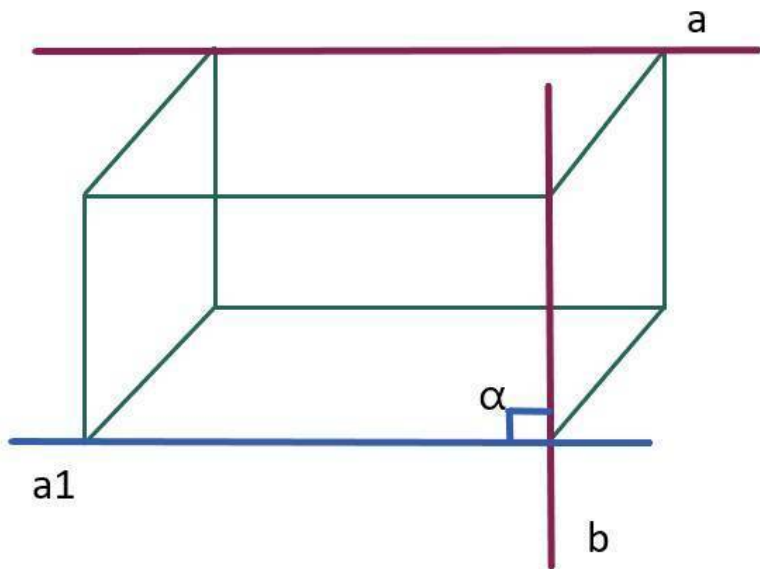


2) Если прямые скрещиваются, то угол между ними равен углу между прямыми, параллельными заданным прямым и лежащим в одной плоскости.

Значит угол между скрещивающимися прямыми равен углу между пересекающимися прямыми, параллельным скрещивающимися прямым.



Если между пересекающимися прямыми, параллельными скрещивающимся прямым угол равен 90° , то они перпендикулярны. А значит и скрещивающиеся прямые перпендикулярны.



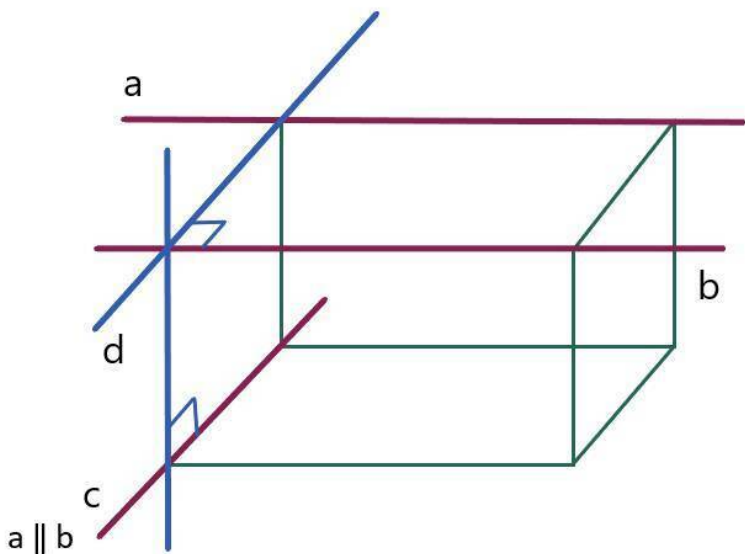
В пространстве перпендикулярными могут быть прямые:

1. Пересекающиеся.
2. Скрещивающиеся.

11. 2 Лемма (теорема) о перпендикулярности двух параллельных прямых третьей прямой.

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна

этой прямой.



1) Пересекающиеся.

Если $a \perp d$, то $b \perp d$

2) Скрещивающиеся.

Если $a \perp c$, то $b \perp c$.

12)) Плоскость и прямая в пространстве.

12. 1 Определение перпендикулярной прямой к плоскости.

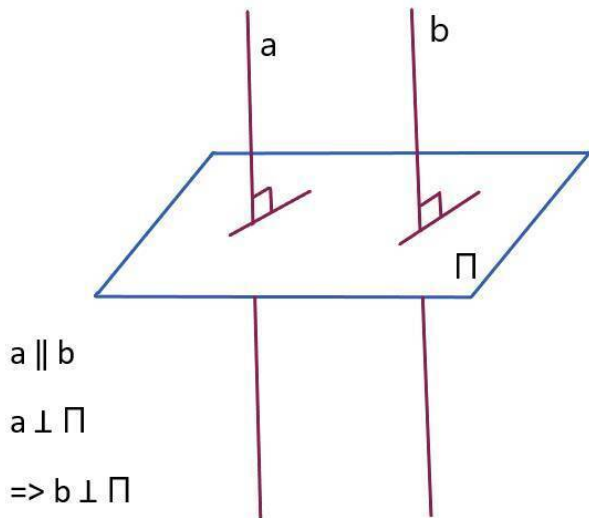
Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Плоскость перпендикулярна к прямой, если эта прямая перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости (достаточно двух пересекающихся прямых).

12. 2 Теоремы, в которых устанавливается связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.

Первая теорема.

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.



Вторая теорема.

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

$$a \perp \Pi$$

$$b \perp \Pi$$

$$\Rightarrow a \parallel b$$

12. 3 Признак перпендикулярности прямой и плоскости.
Теорема.

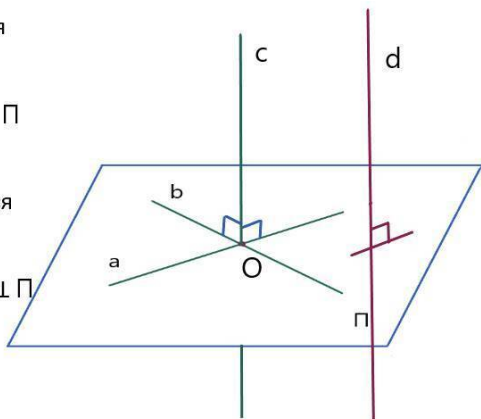
Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся
прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к
этой плоскости.

1. Для
пересекающихся
прямых.

$$c \perp a; c \perp b \Rightarrow c \perp \Pi$$

2. Для
скрещивающихся
прямых.

$$d \perp a; d \perp b \Rightarrow d \perp \Pi$$

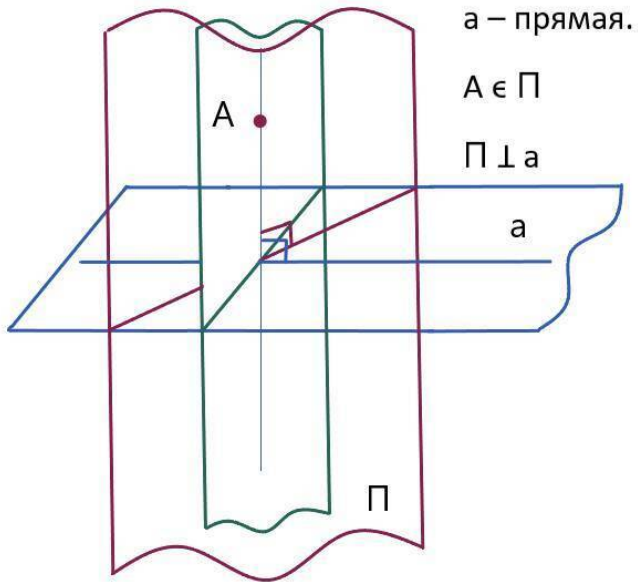


Теорема.

Если плоскость перпендикулярна к прямой, то все прямые, лежащие в этой плоскости, перпендикулярны к этой прямой.

12. 4 Теорема о перпендикулярности прямой и плоскости.

Через любую точку пространства проходит плоскость перпендикулярная к данной прямой.

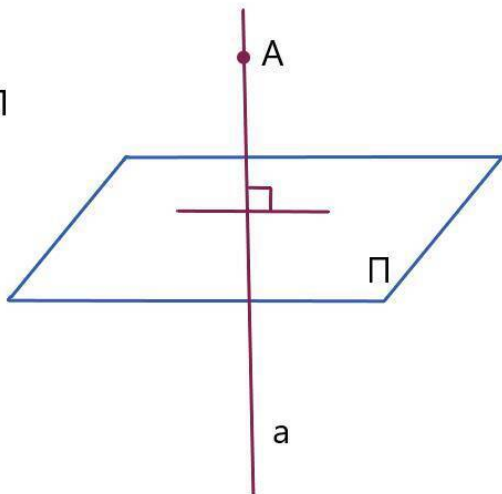


12. 5 Теорема о прямой перпендикулярной к плоскости.
 Теорема.

Через любую точку пространства проходит прямая перпендикулярная к данной плоскости и при том только одна.

$A \in a$

$a \perp \Pi$



12. 6 Теоремы о параллельности и перпендикулярности
прямых и плоскостей.

Первая теорема.

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «Литрес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на Литрес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.