

Василиса Волконская
Производные функций.
Примеры решения.

<https://litres.ru/74571762>

SelfPub; 2026

Аннотация

В серии этих книг собрано много методик по решению и школьной математики и высшей математики. В книгах подробно разобраны различные примеры, для сдачи экзаменов и в школе и в университете. Собраны многие правила и методики решения задач. Материал написан доступно для любого среднего ученика, который хочет понять математику, а не бездумно ее списать.

Василиса Волконская

Производные функций.

Примеры решения.

Содержание:

- 1) Подготовка к определению производной.
- 2) Определение производной.
- 3) Наибольшее и наименьшее значение функции.
- 4) Производные для степенной функции.
- 5) Свойства производных функции для суммы и разности.
- 6) Свойства производных функций для произведения и частного.
- 7) Нахождение максимумов и минимумов и их значений.
- 8) Задачи на нахождение производной.
- 9) Производные элементарных функций.
- 10) Производная произведения функций.
- 11) Производная частного функций.
- 12) Производная произведения сложных функций.
- 13) Производная частного сложных функций.
- 14) Производная различных функций.
- 15) Нахождение критических точек и точек экстремума и их значений.
- 16) Построение графика функции.
- 17) Производная степенно-показательной функции.

Производные.

1)) Подготовка к определению производной.

В нашем мире всё движется.

Движение может быть равномерное (постоянная скорость) или с ускорением (скорость меняется).

Назовём движущееся тело материальной точкой.

Когда материальная точка движется, она проходит какой-то путь.

Обозначим его буквой S .

Во время движения материальной точки, проходит какое-то время.

Обозначим его буквой t .

Движение материальной точки за какое-либо время, это функциональная зависимость (функция).

Где t (время) будет независимой переменной.

А $S(t)$ (путь проходящий точкой за определённое время) будет зависимой переменной.

Путь от времени зависимая переменная.

Функциональную зависимость можно задать графически на плоскости.

На горизонтальной оси мы изображаем независимые переменные. Это будет время.

На вертикальной оси мы изображаем зависимые переменные. Это будет путь.



Точка пересечения осей будет началом отсчёта. Где путь и время имеют нулевое значение.

Функция $S(t)$ задаёт закон движения материальной точки.

В мире все тела движутся. И в основном они движутся неравномерно.

Например, автомобиль движущийся по дороге может увеличивать скорость или тормозить и может какое-либо время ехать с постоянной скоростью.

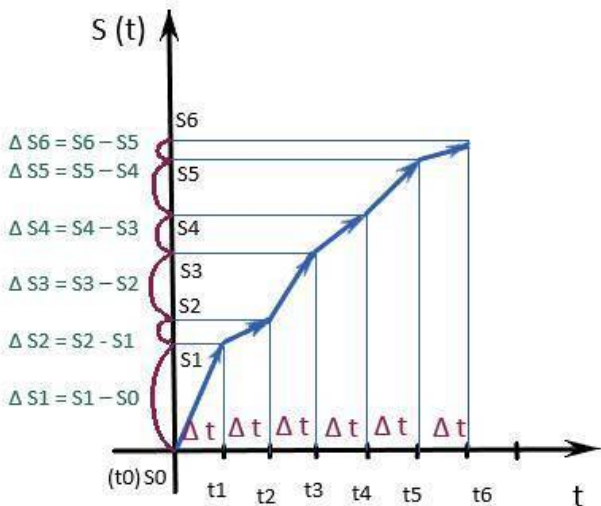
Это всё зависит от знаков, светофоров, пешеходов и других автомобилей.

Поэтому рассматривается такое понятие, как средняя скорость материальной точки.

Это средняя скорость между самой маленькой и самой большой скоростью. И она всегда приблизительная; а не точная.

Пусть рассматриваемое движение не является равномерным.

Если взять равные промежутки времени, то точка совершает перемещения, разные по величине и по направлению.



Так как промежутки времени мы взяли равные, то их размер обозначаем одним символом Δt .

Δ - дельта (разница).

Δt - дельта тэ.

В начале отсчёта время обозначим t_0 (нулевое время).

Скорость движения материальной точки выражается формулой:

$$v = S / t$$

Промежуток пути, который прошла материальная точка - это разность между конечной координатой и начальной координатой.

Путь в начале координат обозначим S_0 (нулевой путь).

$$S_1 - S_0; S_2 - S_1; \dots S_6 - S_5$$

Разность этих координат (путей) тоже можно обозначить символом дельта.

Так как время было одинаковое, то время обозначим Δt .

Так как пути разные, то у каждого дельта будет свой номер (индекс).

Значит, формулу скорости можно записать:

$$v = \Delta S / \Delta t$$

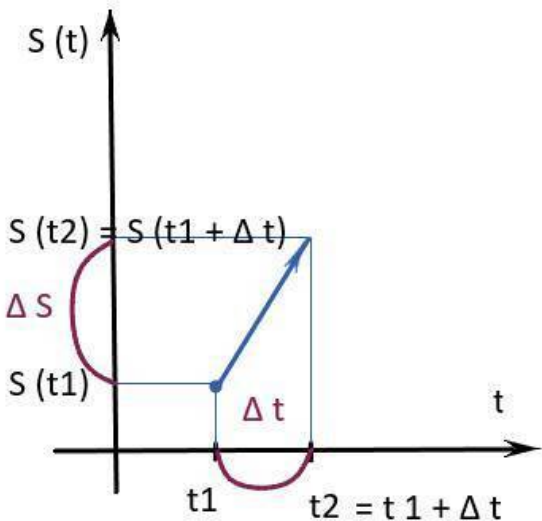
или

$$v = (S_2 - S_1) / (t_2 - t_1)$$

Если мы прошли путь от S_1 до S_2 , то мы прошли путь от $S(t_1)$ до $S(t_2)$.

Если мы прошли путь за время от t_1 до t_2 , то мы прошли время Δt .

Если к первому времени прибавить разницу Δt , то получим второе время.



Если вычислить среднюю скорость движения материальной точки, то она будет выражаться формулой:

$$v_{cp} = (S(\Delta t + t) - S(t)) / \Delta t$$

Так как нам нужна точная скорость материальной точки,

то мы будем уменьшать промежуток времени; и средняя скорость будет точнее.

Чем меньше промежуток времени, тем точнее средняя скорость.

Если t стремится к нулю ($\Delta t \rightarrow 0$), то средняя скорость становится мгновенной скоростью.

Определение.

Скоростью точки в момент времени t (мгновенной скоростью) называют предел, к которому стремится средняя скорость, при $\Delta t \rightarrow 0$.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (S(t + \Delta t) - S(t)) / \Delta t$$

Мгновенную скорость $v(t)$ называют производной функ-

$$\dot{S}(t)$$

ции $S(t)$ и обозначают $S'(t)$ или

$$v(t) = S'(t)$$

$$v(t) = \dot{S}(t)$$

В математике производная обозначается штрихом.

В физике производная обозначается точкой.

Скорость $v(t)$ - это не обязательно скорость движения материальной точки.

Это может обозначать любые изменения скорости.

$S(t)$ - это функция.

t - это независимая переменная (аргумент).

$S'(t) = v(t)$ - это скорость изменения функции.

Она показывает, как ведёт себя функция. Как быстро она изменяется и в какую сторону.

Производная функции показывает скорость изменения функции.

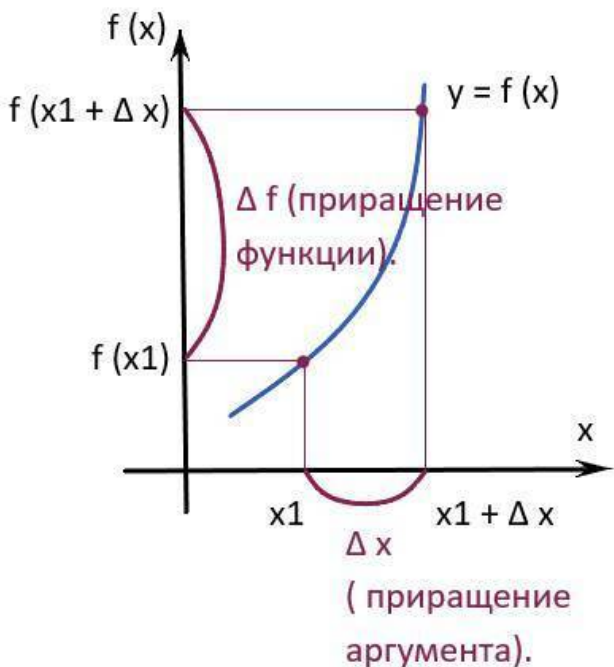
Если не рассматривать движение материальных точек; а рассматривать различные величины (работу, объём, производительность и так далее), то буква S и t можно заменить на f и x .

2)) Определение производной.

Производной функции в данной точке, называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

$$(\Delta x \rightarrow 0)$$

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)) / \Delta x$$



$\Delta f = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ - приращение функции.

$y = f(x)$ - это функция.

$y' = f'(x)$ - это скорость изменения функции.

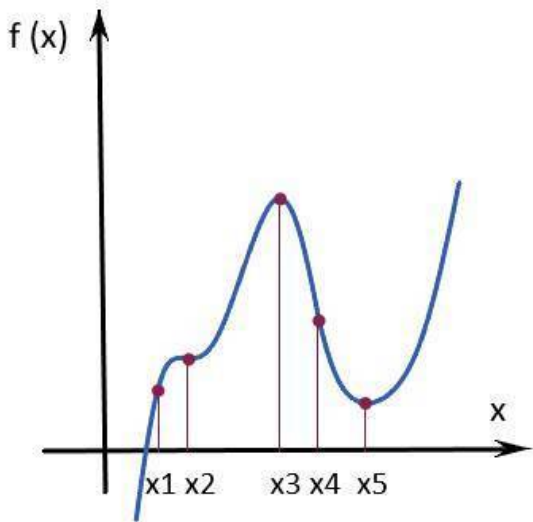
Производная показывает, как меняется функция (возрас-

тает, убывает, или не меняется (постоянна)).

Если производная в точке положительная, то функция возрастает.

Если производная в точке отрицательная, то функцию убывает.

Если производная в точке равна нулю, то функция не возрастает и не убывает (может не менять своё направление).



В точке x_1 функция возрастает, значит $f'(x_1) > 0$ (производная положительная).

В точке x_4 функция убывает, значит $f'(x_4) < 0$ (производная отрицательная).

В точках x_2 ; x_3 ; x_5 функция не возрастает и не убывает, значит $f(x_2) = 0$; $f(x_3) = 0$; $f(x_5) = 0$ (производная равна нулю).

3)) Наибольшее и наименьшее значение функции.

Максимумы и минимумы. Точки экстремума и критические точки.

Критические точки и точки экстремума.

Если производная функции равна нулю, то функция в этой точке не возрастает и не убывает.

Она может менять своё направление в этой точке.

Точка, в которой производная равна нулю, называется критической точкой.

Пример.

$$f(x) = 1/3 x^3 - x$$

$$f'(x) = x^2 - 1$$

Приравняем производную к нулю.

Так как если она равна нулю, то точки будут критическими.

Корни уравнения являются критическими точками.

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

Ответ: ± 1

$x = 1$; $x = -1$ - это критические точки, в которых функция, от которой мы нашли эту производную, может менять своё направление.

Пример два.

$$f(x) = 1/3 (x - 1)^3 + 5$$

$$f'(x) = (x - 1)^2$$

Приравняем производную к нулю.

Так как если она равна нулю, то точки будут критическими.

Корни уравнения являются критическими точками.

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad x - 1 = 0$$

$$x = 1 \quad x = 1$$

Ответ: 1

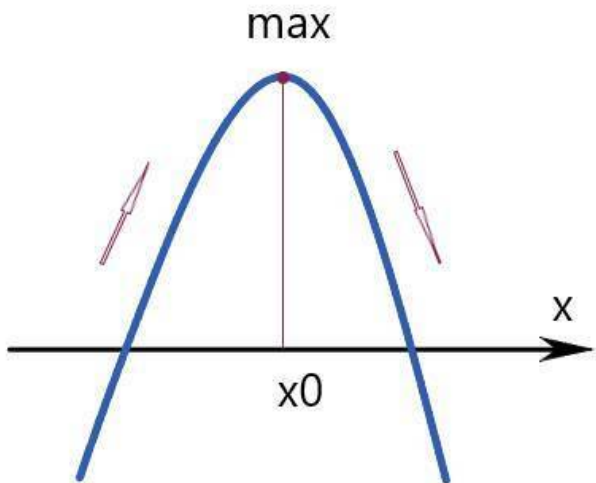
Получили парный корень (два одинаковых корня).

$x = 1$ - это критическая точка, в которой функция может поменять своё направление, а может и не поменять его.

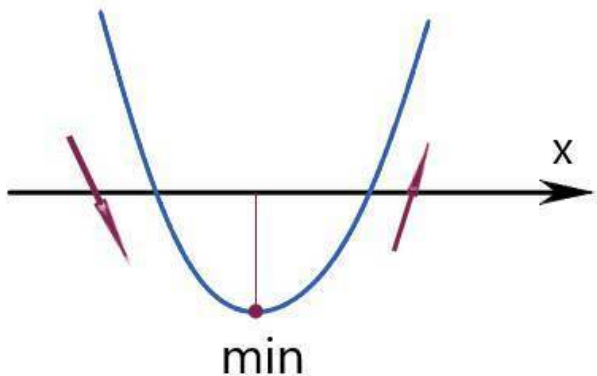
Точка, в которой функция меняет своё направление, называется экстремумом функции.

Функция может менять направление:

1) Если функция возрастала, то она при прохождении точки экстремума начинает убывать. Эта точка экстремума называется максимумом.



2) Если функция убывала, то она при прохождении точки экстремума начинает возрастать. Эта точка экстремума называется минимум $\min$.



Точка, в которой производная функции равна нулю; а направление не поменялось, называется просто критической точкой.

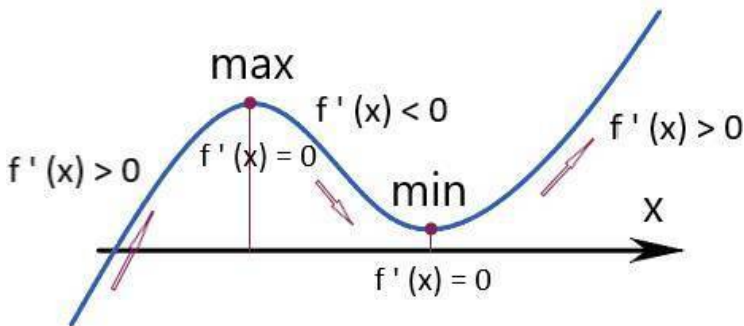
Она не является точкой экстремума.

Если производная функции отрицательная, то функция убывает.

$f'(x) < 0$ функция убывает.

Если производная функции положительная, то функция возрастает.

$f'(x) > 0$ функция возрастает.



Пример один.

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ - функция.

$f'(x) = x^2 - 1$ - производная функции.

Приравняем производную к нулю и найдём критические

точки.

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1$$

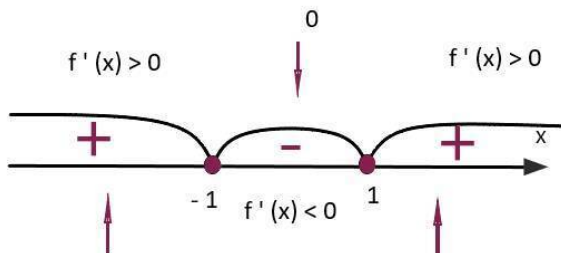
$$x = -1$$

Ответ: ± 1

Нанесём точки на числовую прямую и определим в полученных числовых промежутках знак производной.

«+» производная больше нуля.

«-» производная меньше нуля.



$$f'(0) = 0 - 1 = -1$$

Ставим минус и чередуем знаки.

Значит в точках $x = 1$ и $x = -1$ функция меняет своё направление.

Это точки экстремума.

($\cap$)

Если с «+» на «-» , то это горка максимум
max.

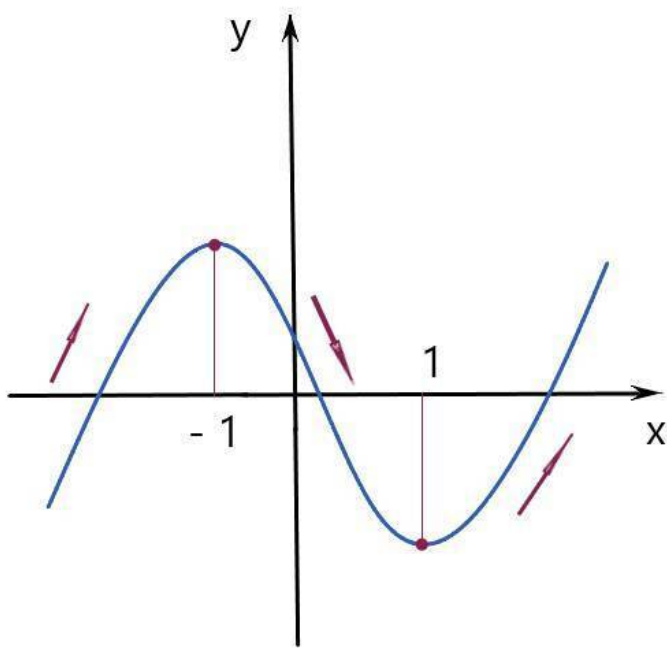
$$x = -1 \text{ (max).}$$

($\cup$)

Если с «-» на «+», то это впадина минимум
min.

$$x = 1 \text{ (min).}$$

Изобразим график функции схематично.



Пример два.

$f(x) = 1/3 (x - 1)^3 + 5$ - функция.

$f'(x) = (x - 1)^2$ - производная функции.

Приравняем производную к нулю и найдём критические точки.

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

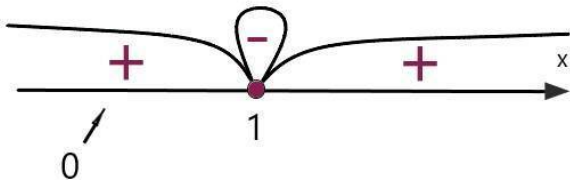
$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$x = 1$$

Ответ: $x = 1$

Нанесём точку на числовую прямую и определим в полученных числовых промежутках знак производной.



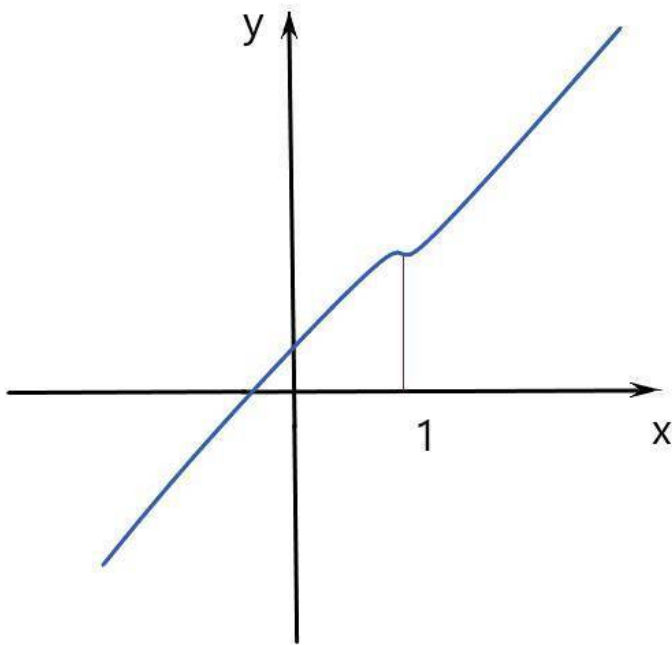
$f'(0) = (0 - 1)^2 = 1$ (ставим «+» и чередуем знаки).

Так как $x = 1$ парный корень, ставим петлю.

При переходе через точку $x = 1$ производная знака не поменяла и значит, функция не поменяла своё направление.

Эта критическая точка не является точкой экстремума.

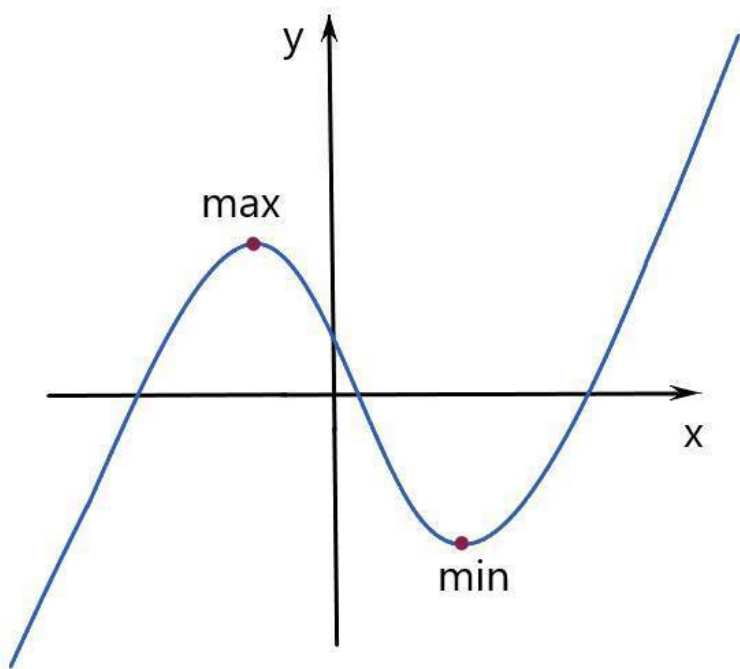
Изобразим график функции схематично.



Наибольшее и наименьшее значение функции.

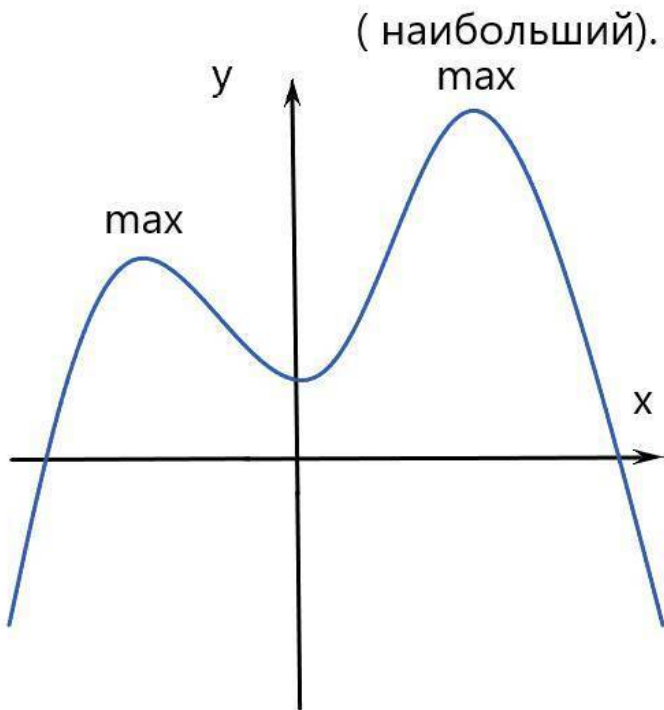
Если мы рассматриваем функцию целиком, то:

1) У неё может не быть наибольшего и наименьшего значения, если ее концы уходят в бесконечность.

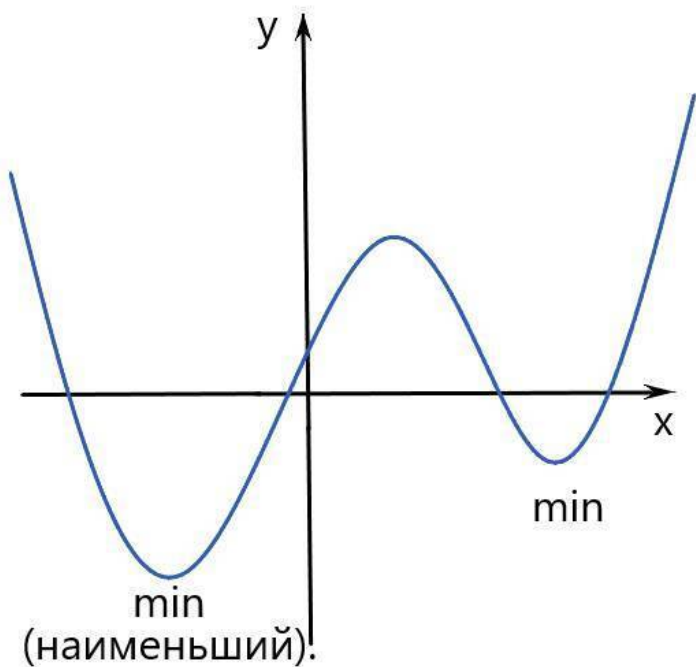


2) У неё может быть или наименьшее или наибольшее значение.

Тогда самый большой максимум будет наибольшим значением.



А самый маленький минимум будет наименьшим значением.



Про функцию $y = f(x)$ говорят, что она принимает на множестве X наименьшее значение в точке x_0 , если $x_0 \in X$ и $f(x_0) \leq f(x)$ для всех $x \in X$.

Про функцию $y = f(x)$ говорят, что она принимает на множестве X наибольшее значение в точке x_0 , если $x_0 \in X$ и $f(x_0) \geq f(x)$ для всех $x \in X$.

$(x0) \geq f(x)$ для всех $x \in X$.

4)) Производные для степенной функции.

1. Производная от числа равна нулю.

C - число (константа).

$$C' = 0$$

2. Производная функции $y = x$ равна единице.

$$x' = 1$$

3. Производная степенной функции вычисляется по формуле:

$$y = x^n$$

$$y' = n x^{n-1}$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

Пример 1.

$$y = x^2$$

$$y' = (x^2)' = 2 x^{2-1} = 2x$$

Ответ: $2x$

Пример два.

$$y = x^3$$

$$y' = (x^3)' = 3 x^{3-1} = 3x^2$$

Ответ: $3x^2$

Пример 3.

$$y = \sqrt{x} \text{ или } y = x^{1/2}$$

$$y' = (x^{1/2})' = 1/2 \times x^{1/2-1} = 1/2 \times x^{-1/2} = 1/2 \times 1 / x^{1/2} \\ = 1 / 2\sqrt{x}$$

Ответ: $1 / 2\sqrt{x}$.

Пример четыре.

$$y = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$$

$$y' = (x^{1/3})' = 1/3 \times x^{1/3-1} = 1/3 \times x^{-2/3} = 1/3 x^{2/3} = 1/3 \sqrt[3]{x^2}$$

$$\text{Ответ: } 1/3 \sqrt[3]{x^2}$$

Пример 5.

$$y = 1/x = x^{-1}$$

$$y' = (x^{-1})' = -1 x^{-1-1} = -x^{-2} = -1/x^2$$

$$\text{Ответ: } -1/x^2$$

Пример 6.

$$y = 1/\sqrt{x} = x^{-1/2}$$

$$y' = (x^{-1/2})' = -(1/2) x^{-1/2-1} = -(1/2) x^{-3/2} = -1/2 x^{3/2} = -1/2 \sqrt[3]{x^3}$$

$$\text{Ответ: } -1/2 \sqrt[3]{x^3}$$

Пример 7.

$$y = 1/x^2 = x^{-2}$$

$$y' = (x^{-2})' = -2 x^{-2-1} = -2 x^{-3} = -2/x^3$$

$$\text{Ответ: } -2/x^3$$

Пример 8.

$$y = 1/\sqrt[3]{x} = 1/x^{1/3} = x^{-1/3}$$

$$y' = (x^{-1/3})' = -1/3 \times x^{-1/3-1} = -1/3 \times x^{-4/3} = -1/3 x^{4/3} = -1/3 \sqrt[3]{x^4}$$

$$\text{Ответ: } -1/3 \sqrt[3]{x^4}$$

Пример 9

$$y = 1/x^3 = x^{-3}$$

$$y' = (x^{-3})' = -3 x^{-3-1} = -3 x^{-4} = -3/x^4$$

$$\text{Ответ: } -3/x^4$$

Таблица некоторых производных для степенной функции.

$$1. (x^2)' = 2x$$

$$2. (x^3)' = 3x^2$$

$$3. (1/\sqrt{x})' = -1/2 \times 1/\sqrt{x}^3$$

$$4. (\sqrt[3]{x})' = 1/(3\sqrt[3]{x}^2)$$

$$5. (\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$$

$$6. (1/x)' = -1/x^2$$

$$7. (1/\sqrt[3]{x})' = -1/(3\sqrt[3]{x}^4)$$

5)) Свойства производных функции для суммы и разности.

1) Производная суммы равна сумме производных.

$$f(x) + g(x) = f'(x) + g'(x)$$

2) Производная разности равна разности производных.

$$f(x) - g(x) = f'(x) - g'(x)$$

3) Производная произведения числа и функции равна произведению числа и производной функции.

Постоянный множитель можно вынести за знак производной.

$$(c f(x))' = c f'(x)$$

Примеры один.

$$f(x) = -3x^2 + 2$$

$$f'(x) = (-3x^2 + 2)' = (-3x^2)' + (2)' = -3 \times 2x + 0 = -6$$

Ответ: -6

Пример 2.

$$y = x^3 - x^2$$

$$y' = (x^3 - x^2)' = (x^3)' - (x^2)' = 3x^2 - 2x$$

Ответ: $3x^2 - 2x$

Пример три.

$$y = 3x^2 - 6x + 6$$

$$y' = 3x \times 2x - 6 = 6x - 6$$

Ответ: $6x - 6$

Пример четыре.

$$f(x) = -3x^3 + 2x^2 - x - 5$$

$$f'(x) = -3 \times 3x^2 + 2 \times 2x - 1 - 0 = -9x^2 + 4x - 1$$

Ответ: $-9x^2 + 4x - 1$

б)) Свойства производных функций для произведения и частного.

1) Производная произведения функций, равна сумме произведений производной первой функции на вторую и первой функции на производную второй функции.

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

Пусть $f(x) = U$; $g(x) = V$,

$$(U V)' = U' V + U V'$$

2) Производная частного функций, равна частному от разности произведений производных и функций сначала первой, а потом второй делённой на квадрат второй функции, стоящей в знаменателе.

$$(U / V)' = (U' V - U V') / V^2$$

3) Производная сложной функции.

Производная сложной функции, равна произведению производной внутренней функции на производную внешней функции.

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «Литрес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на Литрес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.