

Василиса Волконская

Ряды. Примеры решения

<https://litres.ru/74598608>

SelfPub; 2026

Аннотация

В книге собрано много методик по решению школьной и высшей математики. Подробно разобраны различные примеры для сдачи экзаменов в школе и в университете. Собраны многие правила и методики решения задач. Материал написан доступно для любого среднего ученика, который хочет понять математику, а не бездумно ее списать.

Василиса Волконская

Ряды. Примеры решения

Содержание:

- 1) Основные понятия. Сходимость ряда.
- 2) Свойства сходящихся рядов.
- 3) Необходимый признак сходимости.
- 4) Признак сравнения.
- 5) Предельный признак сравнения.
- 6) Признак Даламбера.
- 7) Признак Коши.
- 8) Интегральный признак сходимости ряда.
- 9) Основные правила для нахождения сходимости рядов с положительными членами.
- 10) Сходимость рядов с членами произвольного знака.
- 11) Свойства абсолютно сходящихся рядов.
- 12) Примеры решения знакочередующихся рядов.
- 13) Приближенное вычисление суммы сходящегося знакочередующегося ряда.

Числовые ряды.

- 1)) Основные понятия. Сходимость ряда.

Числовым рядом называется бесконечная последовательность чисел, соединённых знаком сложения.

Это сумма чисел от первого числа до бесконечности.

Числа $U_1, U_2, \dots, U_n$ - называются членами ряда.

Un - общий или n - ый член ряда.

Ряд считается заданным, если известен его общий член:

$$U_n = f(n); (n = 1, 2 \dots).$$

То есть, задана функция $f(n)$ от натурального аргумента.

Из этого можно сделать вывод, что все последовательности, которые можно задать формулой являются рядами.

Пример.

$$2/5 + 4/9 + 6/13 + \dots + 2n/(4n + 1)$$

Это ряд чисел.

Рассмотрим суммы конечного числа членов ряда.

$$S_1 = U_1; S_2 = U_1 + U_2$$

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

Сумма n первых членов ряда S_n , называется n - ой частичной суммой ряда.

Ряд называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности его частных сумм, при $n \rightarrow \infty$, то есть:

$$\lim S_n = S$$

Число S называется суммой ряда, когда можно записать:

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots = \sum U_n = S$$

Если конечного предела последовательности частичных сумм не существует, то ряд называется расходящимся.

Пример.

Исследовать сходимость геометрического ряда, то есть ряда составленного из членов геометрической прогрессии.

$$b + b q + b q^2 + \dots + b q^{n+1} + \dots = \sum b q^{n+1}$$

Решение.

Нужно установить при каких значениях q (знаменателя ряда) ряд сходится и при каких значениях расходится.

Запишем формулу нахождения суммы n первых членов геометрической прогрессии, при $q \neq 1$.

$$S_n = b (q^n - 1) / (q - 1)$$

Рассмотрим несколько случаев.

1) Если $|q| < 1$

Найдём предел знаменателя в n -ой степени, при $n \rightarrow \infty$.

$$\lim q^n =$$

Так как число $-1 < q < 1$, то оно правильная дробь, получим:

$$\lim (1 / m)^n = \lim 1 / m^n =$$

Подставим то, к чему стремится n (бесконечность).

$$= 1 / m = 1 / \infty = 0$$

Предел равен нулю.

Найдём предел суммы n -ых членов прогрессии, при $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \lim S_n &= \lim (b (q^n - 1) / (q - 1)) = \lim ((b q^n - b) / (q - 1)) \\ &= \lim (b q^n / (q - 1) - b / (q - 1)) = \lim (b / m^n / (q - 1) - b / (q - 1)) \\ &= b / \infty / (q - 1) - b / (q - 1) = 0 / (q - 1) - b / (q - 1) = 0 - b / (q - 1) = -b / (q - 1) = b / (1 - q) \end{aligned}$$

То есть ряд сходится к числу $b / (1 - q)$, и сумма его равна $S = b / (1 - q)$

2) Если $|q| > 1$

Найдём предел знаменателя в n -ой степени, при $n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = q^\infty = \infty$$

Следовательно, и предел суммы равен:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b(q^n - 1) / (q - 1))$$

Так как предел не равен конечному числу, а равен бесконечности, то ряд расходится.

$$3) q = 1$$

Ряд принимает вид:

$$b + b + b + b + \dots + b + \dots$$

U_n - его частичная сумма.

$$S_n = b + b + \dots + b = n b$$

Предел этой суммы.

$$\lim S_n = \lim n b = \infty$$

Ряд расходится.

$$4) \text{ Если } q = -1$$

Ряд принимает вид:

$$b - b + b - b + \dots + (-1)^n b + \dots$$

Частичная сумма такого ряда равна нулю.

$$S_n = 0$$

Если найти предел этой суммы.

$\lim S_n$ - то он не существует.

Значит, ряд расходится.

Ответ:

Ряд сходится при $|q| < 1$

Ряд расходится при $|q| \geq 1$

2)) Свойства сходящихся рядов.

1) Если ряд:

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \dots + U_n + \dots = S$$

Сходится и имеет сумму S и ряд:

$$\lambda U_1 + \lambda U_2 + \lambda U_3 + \lambda U_4 + \dots + \lambda U_n + \dots = \lambda S$$

Ряд полученный, умножением данного ряда на число λ , также сходится и имеет сумму λS

При умножении сходящегося ряда на число получается сходящийся ряд, умноженный на это число; и сумма этого ряда умножается на число.

2) Если два ряда сходятся и имеют суммы S_1 и S_2 , то есть сумма этих рядов сходится; и сумма полученного ряда равна сумме сумм рядов, которые сложили:

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \dots + U_n + \dots = S_1$$

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + \dots + V_n + \dots = S_2, \text{ то}$$

$$(U_1 + V_1) + (U_2 + V_2) + (U_3 + V_3) + (U_4 + V_4) + \dots + (U_n + V_n) + \dots = S_1 + S_2$$

3) Если ряд сходится, то и сходится ряд, полученный из данного, путём отбрасывания или приписывания конечного числа членов.

Для того чтобы ряд сходиллся, необходимо и достаточно, чтобы при $n \rightarrow \infty$, остаток ряда стремился к нулю. То есть:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$

3)) Необходимый признак сходимости.

Теорема.

Если ряд сходится, то предел его общего члена U_n при $n \rightarrow \infty$ равен нулю.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$$

Рассмотренная, теорема выражает лишь необходимый, но

недостаточный признак сходимости ряда.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$, то из этого ещё не следует, что ряд сходится.

Следствие из теоремы.

Если предел общего члена рядом, при $n \rightarrow \infty$, не равен нулю, то ряд расходится.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится.

Этой теоремой можно пользоваться при нахождении расходящихся рядов.

Пример.

Исследовать на сходимость ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (4n + 3) / (5n - 7)$$

Решение.

Найдём предел n -ого члена ряда, при $n \rightarrow \infty$.

$$\lim ((4n + 3) / (5n - 7)) = [\infty / \infty] =$$

Получим неопределённость.

Её нужно раскрыть.

Поделим числитель и знаменатель дроби на n .

$$= \lim ((4n / n + 3 / n) / (5n / n - 7 / n)) = \lim ((4 + 3 / n) / (5 - 7 / n)) = (4 + 3 / \infty) / (5 - 7 / \infty) = (4 + 0) / (5 - 0) = 4 / 5$$

Предел n -ого члена не равен нулю.

Следовательно, ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

Пример.

Гармонический ряд.

$$1 + 1 / 2 + 1 / 3 + \dots + 1 / n + \dots$$

Исследуем его на сходимость.

Найдём предел n -ого члена, при $n \rightarrow \infty$.

$$\lim (1 / n) = 1 / \infty = 0$$

Необходимый признак сходимости выполняется, но ряд

расходится.

Доказательство в учебнике Кремер.

Ряды с положительными членами.

4)) Признак сравнения.

Пусть даны два ряда с положительными членами.

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} V_n$$

Причём члены первого ряда не превосходят членов второго ряда, то есть при любом n :

$U_n \leq V_n$, тогда:

1) Если сходится второй ряд, то сходится и первый ряд.

2) Если расходится первый ряд, то и расходится второй ряд.

Замечание:

Так как сходимость ряда не изменяется при отбрасывании конечного числа членов ряда, то условие $U_n \leq V_n$ не обязательно должно выполняться с первых членов рядов и только для членов с одинаковыми номерами n .

Достаточно чтобы оно выполнялось, начиная с некоторого

номера $n = k$, или чтобы имело место неравенство $U_n \leq V_m + n$

m - некоторое целое число.

Приведём эталонные ряды, часто используемые при сравнении.

1) Геометрический ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1}$$

Сходятся, при $|q| < 1$

Расходятся, при $|q| \geq 1$

2) Гармонический ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n - \text{расходится.}$$

3) Обобщённый гармонический ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha} = 1 + 1/2^{\alpha} + 1/3^{\alpha} + \dots + 1/n^{\alpha} + \dots$$

$\alpha > 1$ - ряд сходится.

$\alpha \leq 1$ - ряд расходится.

Пример.

Исследовать сходимость ряда.

$$1 + 1/2 \times 3 + 1/3 \times 3^2 + \dots + 1/n \times 3^{n-1} + \dots$$

Решение.

Посмотрим на n -ый член нашего ряда.

$$1/n \times 3^{n-1}$$

Сравним данный ряд с геометрическим рядом.

Его n -ый член будет равен $1/3^{n-1}$

Так как знаменатель этого ряда $q = 1/3 < 1$, следовательно, этот ряд сходится.

Сравним члены данного ряда и геометрического ряда.

Для этого найдём первые n членов геометрического ряда.

Чтобы их найти, нужно подставить вместо n натуральные числа, от одного до бесконечности в данный геометрический ряд:

$$1/3^{1-1} = 1/3^0 = 1$$

$$1/3^{2-1} = 1/3^1 > 1/6$$

$$1/3^{3-1} = 1/3^2 = 1/9 > 1/27$$

$$1/3^{4-1} = 1/3^3 = 1/27 > 1/81$$

Члены данного ряда меньше членов сходящегося геометрического ряда.

Следовательно, данный ряд сходится.

Нестандартность применения признака сравнения заключается в том, что надо не только подобрать соответствующий ряд, с которым нужно сравнить данный ряд, но и доказать неравенство $U_n \leq V_n$.

Для чего часто требуется преобразование рядов.

Например, отбрасывание или приписывание конечного числа членов, умножение на определённые числа и так далее.

Более простым может оказаться предельный признак сравнения.

5)) Предельный признак сравнения.

Теорема.

Если даны два ряда с положительными членами и существует конечный предел при $n \rightarrow \infty$; и отношение их общих членов не равно нулю; а равно числу; то ряды одновременно, либо сходятся, либо расходятся.

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ - ряды с положительными членами.

$$\text{Если } \lim_{n \rightarrow \infty} (U_n / V_n) = k$$

k - число; $k \neq 0$

Если ряд, с которым мы сравниваем данный ряд, сходится, то и данный ряд сходится.

Если ряд, с которым мы сравниваем данный ряд, расходится, то и данный ряд расходится.

№13. 37

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n / (3n^2 - 5)$$

Так как при больших n :

$$2n / (3n^2 - 5) \approx 2 / n$$

То будем брать для сравнения гармонический ряд:

$$\sum 1 / n$$

По предельному признаку сравнения получим предел от-

ношения членов рядов, при $n \rightarrow \infty$.

$$\lim (2n / (3n^2 - 5)) : (1 / n) = \lim (2n / (3n^2 - 5) \times (n / 1)) \\ = \lim (2n^2 / (3n^2 - 5)) = [\infty / \infty] =$$

Поделим числитель и знаменатель дроби на n^2 .

$$= \lim (2n^2 / n^2 / (3n^2 / n^2 - 5 / n^2)) = \lim (2 / (3 - 5 / n^2)) \\ = 2 / (3 - 5 / \infty) = 2 / (3 - 0) = 2 / 3$$

Так как предел отношения общих членов равен числу $2/3 \neq 0$ и гармонический ряд расходится, то и данный ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

№ 13. 38

Исследовать на сходимость ряд.

$$\sum (2n + 7) / (3n^3 + 11)$$

Так как при больших n :

$$(2n + 7) / (3n^3 + 11) \approx 1 / n^2$$

То будем брать для сравнения обобщённый гармонический ряд:

$$\sum 1 / n^2$$

Найдём предел отношения общих членов рядов, при $n \rightarrow \infty$.

$$\lim ((2n + 7) / (3n^3 + 11)) : (1 / n^2) = \lim ((2n + 7) / (3n^3 + 11) \times n^2 / 1) \\ = \lim ((2n^3 + 7n^2) / (3n^3 + 11)) = [\infty / \infty] = \lim ((2n^3 / n^3 + 7n^2 / n^3) / (3n^3 / n^3 + 11 / n^3)) \\ = \lim ((2 + 7 / n) / (3 + 11 / n^3)) = (2 + 7 / \infty) / (3 + 11 / \infty) \\ = (2 + 0) / (3 + 0) = 2 / 3$$

Так как предел отношения общих членов рядов равен чис-

ду $k = 2 / 3$ и это число не равно нулю; и обобщённый гармонический ряд сходится; так как $\alpha = 2$; то и данный ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

Как выбрать для сравнения ряд.

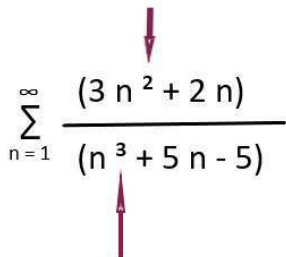
Если общий член ряда правильная дробь.

Степень числителя меньше степени знаменателя.

То выбирается для сравнения обобщённый гармонический ряд, степень α которого равна разности между степенью знаменателя, большей из всех; и степенью числителя, большей из всех.

Пример.

Самая большая степень числителя.


$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 n^2 + 2 n)}{(n^3 + 5 n - 5)}$$

Самая большая степень знаменателя.

Значит α степень переменной гармонического ряда:

$$\sum 1 / n$$

$$\alpha = 3 - 2 = 1$$

Значит, сравниваем данный ряд с гармоническим рядом, у которого общий член равен $1 / n$.

№ 13. 39

а) Исследовать на сходимость ряд.

$$\sum 1 / \sqrt{(n (1 + n^2))}$$

Нужно найти обобщённый гармонический ряд, с которым сравнивается данный ряд.

Найдём общий член ряда.

$$1 / \sqrt{(n (1 + n^2))} =$$

В числителе дроби стоит число, значит это многочлен нулевой степени.

$$1 \times n^0 = 1$$

Значит, степень числителя равна нулю, а в знаменателе стоит корень. И сразу не определить степень.

Нужно корень превратить в рациональную степень.

$$\sqrt{(n (1 + n^2))} = \sqrt{(n + n^3)} = (n + n^3)^{1/2}$$

Значит, самая большая степень этого выражения равна $3 / 2$.

Найдём α (степень переменной обобщённого гармонического ряда).

$$\alpha = 3 / 2 - 0 = 3 / 2$$

Значит ряд, с которым мы будем сравнивать данный ряд:

$$1 / n^{3/2} = 1 / \sqrt{n^3}$$

Посмотрим на этот ряд.

Он сходится, так как $\alpha = 3 / 2 > 1$

Теперь с помощью предельного признака сравнения, определим, сходится ли данный ряд.

Найдём предел отношения общих членов рядов, при $n \rightarrow \infty$.

$$\lim (1 / \sqrt{n(1 + n^2)}) : (1 / \sqrt{n^3}) = \lim (1 / \sqrt{n + n^3}) \times \sqrt{n^3} / 1 = \lim (\sqrt{n^3} / \sqrt{n + n^3}) = [\infty / \infty] =$$

Поделим числитель и знаменатель дроби на n^3 .

$$= \lim (\sqrt{n^3 / n^3} / \sqrt{(n / n^3 + n^3 / n^3)}) = \lim (\sqrt{1} / \sqrt{(1 + 1 / n^2)}) = \sqrt{1} / \sqrt{(1 + 1 / \infty)} = \sqrt{1} / \sqrt{(1 + 0)} = 1$$

Так как предел не равен нулю, то оба ряда сходятся.

Ответ: ряд сходится.

№ 13. 39.

б) Исследовать ряд на сходимость с помощью признака сравнения.

$$\sum 1 / \sqrt{n(1 + n^2)}$$

Сравним этот ряд с обобщённым гармоническим рядом.

$$\alpha = 3 / 2$$

$$\sum 1 / \sqrt{n^3}$$

Сравним несколько членов этих рядов.

При $n = 1$

$$1 / \sqrt{1(1 + 1)} = 1 / \sqrt{2} \approx 0,71$$

$$1 / \sqrt{1} = 1$$

$$1 > 0,71$$

Член данного ряда меньше первого члена обобщённого гармонического ряда.

При $n = 2$

$$1 / \sqrt{(2(1 + 2^2))} = 1 / \sqrt{10} \approx 0,32$$

$$1 / \sqrt{2^3} = 1 / \sqrt{8} \approx 0,35$$

$$0,35 > 0,32$$

Второй член данного ряда меньше второго члена обобщённого гармонического ряда.

При $n = 3$

$$1 / \sqrt{(3(1 + 3^2))} = 1 / \sqrt{30} \approx 0,18$$

$$1 / \sqrt{27} \approx 0,19$$

$$0,19 > 0,18$$

Третий член данного ряда меньше третьего члена обобщённого гармонического ряда.

Так как члены данного ряда меньше членов обобщённого гармонического ряда и гармонический обобщённый ряд сходится, то и данный ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

№ 13. 40

Исследовать на сходимость ряд.

$$\sum (n + 1) / \sqrt{n^3}$$

Найдём ряд, с которым будем сравнивать данный ряд.

Выпишем общий член данного ряда.

$$(n + 1) / \sqrt{n^3} = (n + 1) / n^{3/2}$$

Степень числителя равна одному; а степень знаменателя равна $3/2$; значит, степень переменной обобщённого гармонического ряда будет:

$$\alpha = 3/2 - 1 = 1/2$$

Значит ряд, с которым будем сравнивать это:

$$1 / n^{1/2} \text{ или } 1 / \sqrt{n}$$

По признаку сравнения найдём несколько членов этих рядов и сравним их.

При $n = 1$

$$(1 + 1) / \sqrt{1^3} = 2 / 1 = 2$$

$$1 / \sqrt{1} = 1$$

$$2 > 1$$

Первый член данного ряда больше первого члена обобщённого гармонического ряда.

При $n = 2$

$$(2 + 1) / \sqrt{2^3} = 3 / 2, 8 \approx 1, 07$$

$$1 / \sqrt{2} = 1 / 1, 4 \approx 0, 71$$

$$1, 07 > 0, 71$$

Второй член данного ряда больше второго члена обобщённого гармонического ряда.

$$(n + 1) / \sqrt{n^3} > 1 / \sqrt{n}$$

n - ый член данного ряда больше n -го члена гармонического обобщённого ряда.

Так как обобщённый гармонический ряд расходится ($\alpha = 1 / 2 < 1$) и члены данного ряда больше членов обобщённого гармонического ряда, то ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

№ 13. 43

Исследовать на сходимость ряд.

$$\sum (3n^2 + 2n) / (n^3 + 5n - 5)$$

Найдём ряд, с которым можно сравнить данный ряд.

Самая старшая степень в знаменателе три; а старшая степень в числителе два.

Значит, степень переменной обобщённого гармонического ряда равна:

$$\alpha = 3 - 2 = 1$$

Получится просто гармонический ряд, который расходится.

$$\sum 1 / n$$

Найдём первый член данного ряда и гармонического ряда.

При $n = 1$

$$(3 + 2) / 1 = 5 > 1$$

Первый член данного ряда больше первого члена гармонического ряда.

При $n = 2$

$$(12 + 4) / (8 + 5) = 16 / 13 > 1 / 2$$

Второй член данного ряда больше второго члена гармонического ряда.

При $n = n$

$$(3n^2 + 2n) / (n^3 + 5n - 5) > 1 / n$$

Этот член данного ряда больше n -го члена гармонического ряда.

Так как члены данного ряда больше членов гармонического ряда, то по признаку сравнения данный ряд расходится.

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «Литрес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на Литрес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.