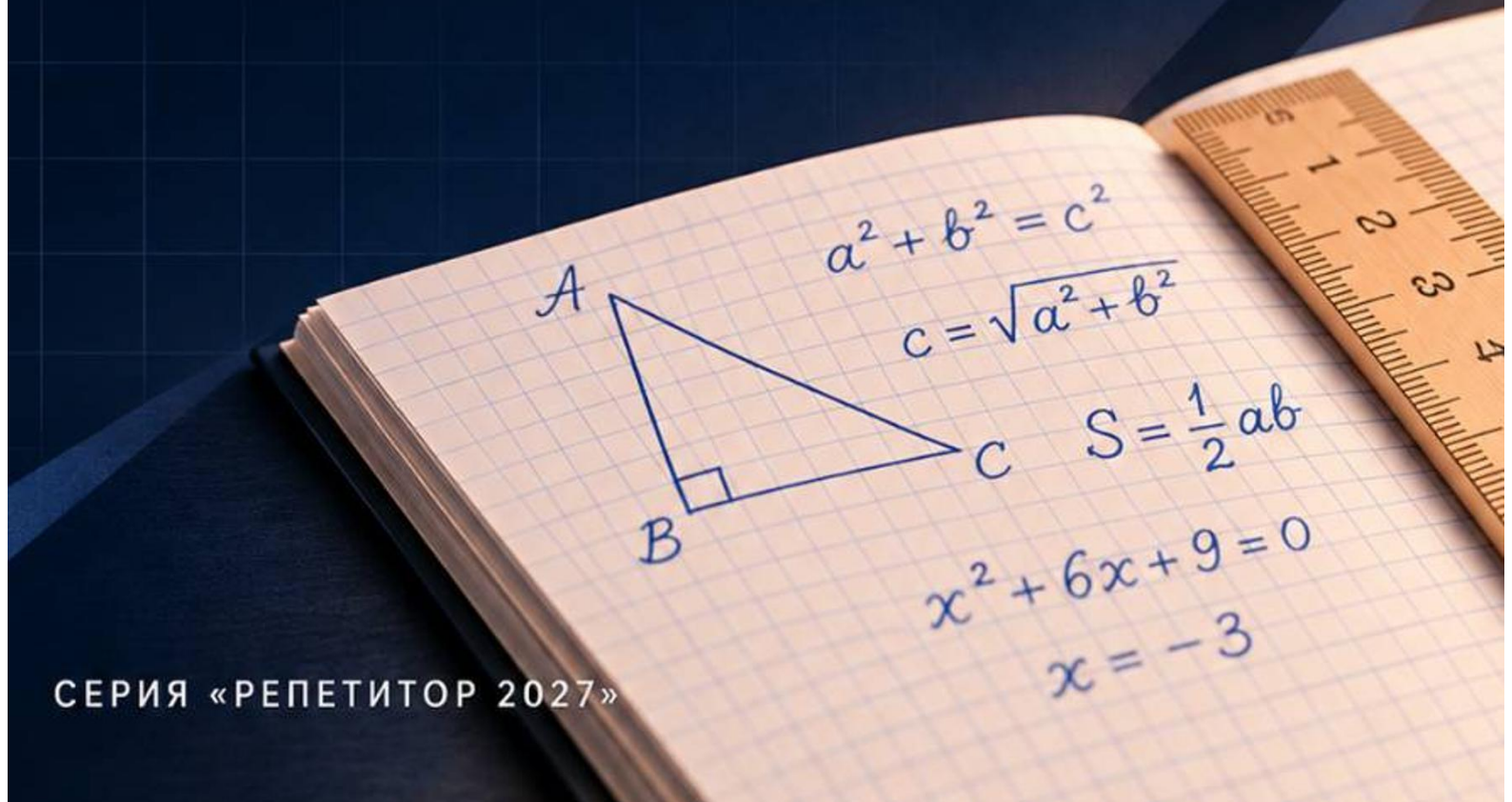
Анна Белова

ОГЭ МАТЕМАТИКА РЕПЕТИТОР 2027

Полный курс: алгебра, геометрия, вероятность



СЕРИЯ «РЕПЕТИТОР 2027»

Анна Белова

ОГЭ. Математика. Репетитор 2027

«Автор»
2026

Белова А.

ОГЭ. Математика. Репетитор 2027 / А. Белова — «Автор», 2026

Это книга для девятиклассников и их родителей. Я разобрала все 25 заданий ОГЭ по математике — по демоверсии, спецификации и кодификатору ФИПИ 2027 года: 19 заданий с кратким ответом и 6 заданий с развёрнутым решением. Не сборник готовых ответов, не обещание чуда. Понятный порядок работы: что проверяют, как решать, где теряют баллы, что тренировать.Структура экзамена: 25 заданий, 31 первичный балл, 235 минут. Изменений по сравнению с 2026 годом нет.Для кого эта книга. Для тех, кто готовится сам. Для тех, кому нужен взрослый рядом. Для родителей, которые хотят понимать, за что ставят баллы, а не просто проверять тетрадь.Читать можно подряд или по отдельным главам — под конкретное задание.Анна Белова

© Белова А., 2026
© Автор, 2026

Содержание

Предисловие. Как пользоваться книгой 6
Что здесь есть 7
Чего здесь нет 8
Как читать 9
Про ответы 10
Один совет перед началом 11
Глава 1. Экзамен-2027: устройство, баллы, стратегия 12
Как устроена работа 13
Из чего состоит первая часть 14
Из чего состоит вторая часть 16
Сколько стоит каждое задание 17
Как переводят баллы в отметку 18
Критерии второй части: за что дают два, один и ноль 19
Порядок работы: что решать первым 20
Бюджет времени на одно задание 21
Пять мифов, которые мешают готовиться 22
Что важно понять про формат 23
Первое практическое задание 24
Как устроен бланк 25
Что происходит в аудитории 26
Стратегия для разных целей 27
Календарь подготовки 28
Как читать спецификацию 30
Частые вопросы родителей 31
Ошибки в стратегии 32
Практикум: собери план 33
Как понять, что готов 34
День перед экзаменом 35
Чек-лист главы 36
Глава 2. Задания 1–5: практический блок 37
Универсальный алгоритм 38
Проценты: три типа задач 39
Единицы измерения: таблица, которая экономит баллы 40
Разбор 1. Шины 41
Разбор 2. Дачный участок 42
Разбор 3. Тарифы 43
Разбор 4. Квартира 44
Разбор 5. Печь 45
Общий приём: таблица данных 46
Как проверять ответ в практическом блоке 47
Масштаб плана 48
Округление: когда вверх, когда вниз 49
Практикум: ещё один сюжет 50
Сюжет со страховкой 51
Сюжет с зонтом 52
Ошибки в единицах: разбор 53

Тренировка 54
Ответы 55
Чек-лист главы 56
Глава 3. Числа и вычисления. Алгебраические выражения 57
Что проверяет задание 6 58
Порядок действий и знаки 59
Обыкновенные дроби 60
Десятичные дроби 61
Степени и стандартный вид числа 62
Корни 64
Модуль и прикидка 65
Формулы сокращённого умножения 66
Разложение на множители 67
Алгебраические дроби 68
Значение выражения: когда подставлять 69
Тренировка 70
Ответы 71
Чек-лист главы 72
Глава 4. Уравнения и неравенства 73
Линейное уравнение 74
Квадратное уравнение 75
Дробно-рациональное уравнение 76
Система уравнений 77
Линейное неравенство 78
Система неравенств 79
Метод интервалов 80
Квадратные неравенства 81
Задание 20: неравенство с дробью 82
Уравнения с модулем 83
Уравнение с параметром 84
Проверка корней 85
Текстовые задачи 86
Как выбрать метод решения 87
Конец ознакомительного фрагмента. 88

Анна Белова
ОГЭ. Математика. Репетитор 2027

Предисловие. Как пользоваться книгой

Эту книгу я писала с одной мыслью: у ученика должен быть взрослый рядом, даже если рядом никого нет.

Репетитор стоит денег. Не у всех родителей они есть. Не у всех есть время возить ребёнка через город два раза в неделю. А экзамен при этом никто не отменял: 25 заданий, 31 первичный балл, 235 минут. И результат нужен не абстрактный, а конкретный — проходной в тот колледж или профильный класс, куда подросток собирается.

Я работаю репетитором много лет. Видела разные истории. Одни дети приходят с «мы всё забыли» и через три месяца решают геометрию лучше, чем я в их возрасте. Другие зубрят формулы, но теряются, когда условие сформулировано чуть иначе. Третьи отлично считают и паникуют на бланке. Четвёртые знают материал, но не умеют записать решение так, чтобы эксперт поставил два балла вместо одного.

Эта книга — про все четыре случая.

Что здесь есть

Тринадцать глав. Первая — про устройство экзамена и стратегию. Вторая — про задания 1–5, тот самый практический блок, где пять вопросов растут из одного текста. Дальше идут темы: числа, выражения, уравнения, неравенства, прогрессии, функции, координаты, вероятность, треугольники, четырёхугольники, окружность. Последние две главы — про часть 2 и про последние недели перед экзаменом.

В каждой главе одинаковая логика:

что именно проверяет задание;

какой минимум теории нужен, без университетских глубин;

разбор примеров — от простого к экзаменационному;

алгоритм, который можно повторить на черновике;

типичные ошибки, за которые теряют баллы;

тренировка с ответами;

короткий чек-лист самопроверки.

В конце книги — приложения. Справочные формулы, таблица «задание — тема — ошибка», ответы к тренировкам, чек-листы по блокам и список источников.

Чего здесь нет

Здесь нет «секретных приёмов», которые позволяют не учить математику. Таких приёмов не существует.

Здесь нет готовых ответов к реальному варианту. Вариант составляют на экзамене, и никто заранее его не видел.

Здесь нет обещания, что будет легко. Будет по-разному. Но сложность экзамена предсказуемая: известно число заданий, темы, баллы и критерии. Это большое преимущество. В жизни такие правила встречаются редко.

Как читать

Если времени мало, не читайте подряд. Возьмите таблицу в приложении, найдите свои слабые номера и работайте по главам, которые к ним относятся.

Если времени нормально — идите по порядку. Глава 1 даёт карту. Глава 2 учит читать практический блок, а он стоит пять баллов из девятнадцати в первой части. Дальше темы можно менять местами: алгебра и геометрия не зависят друг от друга так сильно, как кажется.

Если вы родитель — читайте вместе с ребёнком. Не проверяйте, правильно ли решено. Спрашивайте: «Почему ты сделал этот шаг?» Ошибка в рассуждении важнее ошибки в ответе.

Про ответы

К тренировкам даны ответы, но не полные решения к каждому номеру. Это сделано намеренно. Если ответ не сходится, вернитесь к разбору и найдите шаг, где вы разошлись. Так формируется навык, а не зависимость от подсказки.

К заданиям части 2 в книге приведены образцы записи. Не потому, что существует единственный правильный способ. Потому, что эксперту должно быть понятно, что вы сделали. Понятность — часть математики.

Один совет перед началом

Купите обычную тетрадь в клетку. Не для красоты. Клетка дисциплинирует: график получается ровнее, чертёж — аккуратнее, вычисления в столбик не расползаются по странице. На экзамене вам выдают листы, но привычка работать на клетке останется.

И ещё. Не решайте «по десять однотипных задач», пока не разобрали одну. Десять повторений одной ошибки не дают прогресса. Одно разобранное решение, потом пять похожих — дают.

Теперь к делу.

Глава 1. Экзамен-2027: устройство, баллы, стратегия

Самый частый вопрос в сентябре звучит так: «А это точно можно сдать?»

Можно. Но давайте сразу договоримся: «сдать» — не одно и то же для разных людей. Одному нужно перейти порог и уйти в колледж. Другому — набрать максимум для профильного класса. Третьему — просто закрыть гештальт и не вспоминать математику. Стратегия у этих трёх людей разная. Поэтому сначала — карта местности. Без неё любой совет бесполезен.

Как устроена работа

В 2027 году экзамен по математике не изменился по сравнению с 2026 годом. Это важно: слухи о «новых заданиях» и «всё переписали» можно отбросить. Структура прежняя.

Работа состоит из 25 заданий и делится на две части.

Первая часть — 19 заданий с кратким ответом. Ответ — число, последовательность цифр или номер верного утверждения. Каждое задание стоит один балл. Максимум за первую часть — 19.

Вторая часть — 6 заданий с развёрнутым ответом. Номера с 20 по 25. Каждое стоит два балла. Максимум — 12.

Итого 31 первичный балл.

Время — 235 минут. Это 3 часа 55 минут. Почти четыре часа, но не «четыре часа на всё подряд». Время уходит неравномерно: пять заданий практического блока могут съесть сорок минут, а одно задание части 2 — столько же.

Разрешено пользоваться линейкой и справочными материалами с основными формулами — их выдают вместе с вариантом. Калькулятор запрещён. Телефон, умные часы, любые гаджеты — тоже. На столах только ручка, карандаш, линейка и выданные справочники.

Из чего состоит первая часть

Задания 1–5 — практический блок. Один текст, к нему пять вопросов. В демоверсии 2027 года это шины: маркировка, диаметр диска, высота боковины, пробег. В других вариантах встречаются печи, участки, квартиры, тарифы, полисы страхования. Сюжет меняется, навык один: вытащить из текста числа, понять, что спрашивают, выбрать формулу и не перепутать единицы.

Дальше идут тематические задания. Вот карта демоверсии 2027 года:

Номер	Что проверяют
6	Действия с числами, прикидка
7	Координатная прямая, сравнение чисел
8	Степени, преобразование выражений
9	Линейное уравнение
10	Вероятность
11	Соответствие графиков и формул
12	Расчёт по формуле
13	Система неравенств
14	Последовательность, практическая задача
15	Треугольник, биссектриса
16	Квадрат и окружность, площадь
17	Трапеция, средняя линия

18
Расстояние на клетчатой бумаге

19
Истинные и ложные утверждения

В разных вариантах номера могут «плавать» внутри блоков, но логика сохраняется. По спецификации первая часть делится так: числа и вычисления — 7 заданий, алгебраические выражения — 1, уравнения и неравенства — 2, числовые последовательности — 1, функции — 1, координаты — 1, геометрия — 5, вероятность и статистика — 1.

Обратите внимание на пропорцию. Геометрия в первой части — пять заданий из девятнадцати. Это четверть. Многие ученики годами игнорируют геометрию, а потом удивляются: «Почему у меня 14 баллов вместо 20?» Потому что пять задач остались пустыми.

Из чего состоит вторая часть

Шесть заданий, по два балла каждое.

Номер
Тема
Уровень

20
Неравенство или уравнение
повышенный

21
Текстовая задача
повышенный

22
График с параметром
высокий

23
Геометрическая задача
повышенный

24
Доказательство
повышенный

25
Геометрическая задача
высокий

Три задания по алгебре, три по геометрии. Это не случайность. Экзамен проверяет обе линии одинаково серьёзно.

Задания 20–22 считаются алгебраическими, 23–25 — геометрическими. Для выставления отметки «4» или «5» в ряде регионов действует дополнительное условие: нужно набрать определённое число баллов именно за геометрию. Точные цифры смотрите в документах своего региона. Общая логика такая: нельзя получить «пять», если все геометрические задачи пропущены.

Сколько стоит каждое задание

Формально первая часть — 19 баллов, вторая — 12. Но «стоимость» в минутах другая.

Одно задание первой части в среднем решается за две-четыре минуты. Одно задание второй части — за пятнадцать-двадцать пять. Ошибка в первой части стоит один балл. Ошибка во второй — два, а иногда и больше, потому что потерянный балл тянет за собой следующий.

Отсюда простая мысль: сначала нужно забрать дешёвые баллы, потом браться за дорогие. Не наоборот.

Как переводят баллы в отметку

Шкала перевода меняется от года к году и может отличаться в регионах. Но ориентир такой:

Первичные баллы	**Отметка**
0–7	2
8–14	3
15–21	4
22–31	5

Эти границы — не обещание. Они могут сдвинуться на один-два балла. Проверяйте официальный документ своего региона весной. Но для планирования они годятся: чтобы рассчитывать на «четвёрку», нужно стабильно решать первую часть и хотя бы два задания второй.

Есть ещё минимальный порог. Для продолжения обучения обычно нужно не меньше восьми первичных баллов. Восемь — это примерно половина первой части. Звучит скромно, но каждый год находятся те, кто не добирает и этого.

Критерии второй части: за что дают два, один и ноль

Это место, где теряют больше всего баллов. Не потому, что не знают математику, а потому, что не понимают правил оценивания.

Задание с развёрнутым ответом оценивают два эксперта независимо. Если их оценки расходятся существенно, назначают третьего. Критерии для всех заданий 20–25 общие.

Два балла. Выбран правильный путь. Из записи понятен ход рассуждений. Получен верный ответ. Всё.

Один балл. Решение в целом верное, но содержит ошибку, которая не влияет на общий ход. Например, арифметическая описка в середине, опечатка в знаке, потерянный корень при отборе. Или наоборот: ответ верный, а обоснование неполное.

Ноль баллов. Неверный путь. Или решения нет. Или ответ записан без объяснения, и непонятно, откуда он взялся.

Здесь есть тонкость, о которой мало говорят. Эксперт оценивает продвижение, а не соответствие эталону. Если вы решили задачу другим способом, но рассуждение понятно и ответ верный, два балла будут. Если вы написали «Ответ: 5» без решения, ноль — даже когда ответ правильный.

Что это значит на практике? Пишите шаги. Не только вычисления, но и короткие пояснения: «по теореме Пифагора», «так как треугольники подобны», «ОДЗ: x /= 0». Одна строка пояснения может стоить балла.

И ещё: если не довели задачу до конца, но сделали содержательный шаг, есть шанс на один балл. Поэтому не зачёркивайте начатое. Доведите до того места, где уверены, и оставьте.

Представьте задание 21: два велосипедиста, 224 километра, разница скоростей 2 км/ч, разница времени 2 часа. Нужно найти скорость второго.

Решение на два балла. «Пусть v — скорость второго. Тогда скорость первого v + 2. Время второго 224/v, время первого 224/(v + 2). Первый прибыл на 2 часа раньше: 224/v - 224/(v + 2) = 2. После преобразований v^2 + 2v - 224 = 0, v = 14 или v = -16. Скорость положительна, поэтому v = 14. Ответ: 14 км/ч».

Здесь видно: обозначение, уравнение, решение, отбор корня, ответ с единицами. Эксперт не додумывает ничего.

Решение на один балл. «224/v - 224/(v+2) = 2. Получилось 14. Ответ: 14». Путь верный, ответ верный, но нет обозначения и отбора корня. Формально этого может хватить для двух баллов, но при строгой проверке снимут один: не показано, почему корень один.

Решение на ноль. «Скорость первого 16, второго 14, разница 2. Ответ: 14». Ответ может быть верным, но решения нет. Эксперт не видит, откуда взялись числа. Ноль.

Вывод простой: пишите шаги. Даже если вы решаете в уме, перенесите на бумагу обозначение и уравнение.

Порядок работы: что решать первым

Рекомендации ФИПИ простые: начинайте с заданий, которые получаются. Пропускайте то, что не идёт, возвращайтесь позже. Это не совет «схитрить». Это способ не увязнуть.

Мой рабочий порядок для 235 минут выглядит так.

0–10 минут. Просмотрите весь вариант. Не решайте, а листайте. Отметьте задания, которые «сразу видно». Отметьте те, где нужен чертёж. Отметьте то, что вызывает ступор. Это карта на бой.

10–50 минут. Задания 1–5, практический блок. Пять баллов, и они почти всегда решаются, если внимательно прочитать текст.

50–100 минут. Задания 6–19. Идите по порядку, но пропускайте всё, что не решается за три-четыре минуты. Помечайте пропущенное.

100–120 минут. Вернитесь к пропущенному в первой части. Здесь уже видно, какие темы «не пошли». Не пытайтесь решить всё. Выберите два-три задания, где есть идея.

120–200 минут. Вторая часть. Начните с задания 20 — оно самое доступное. Потом 21, 23, 24. Задание 22 и 25 — в конце, если останется время.

200–225 минут. Проверка. Перенесите ответы в бланк. Сверьте номера. Проверьте единицы измерения. Перечитайте условия задач, где спрашивали «на сколько больше», а вы нашли «сколько».

225–235 минут. Спокойно доделайте то, что осталось. Не начинайте новую сложную задачу за пять минут до конца.

Это ориентир, не догма. Если вы сильны в геометрии — меняйте порядок. Если практический блок всегда занимает двадцать минут — не растягивайте до пятидесяти.

Бюджет времени на одно задание

Полезно знать нормативы, чтобы вовремя остановиться.

Блок Заданий	**Время**
1–5	35–45 минут
6–19	55–65 минут
20–22	45–55 минут
23–25	45–55 минут
Проверка	15–20 минут

Сумма выходит к 235 минутам с небольшим запасом. Запас нужен: что-то всегда идёт медленнее.

Если на задание ушло больше семи минут, а решения нет — ставьте точку и идите дальше. Вернётесь, если останется время. Упрямство на экзамене не награждается.

Самое трудное решение на экзамене — бросить задачу. Вот правило: если вы потратили семь минут и не видите пути, переходите дальше. Не «ещё пять минут», не «сейчас додумаю». Семь минут — это уже много. Вернётесь, если останется время.

Перед уходом запишите, что успели: обозначение, уравнение, чертёж. Это может дать балл, если вы вернётесь и допишете. И это помогает не начинать с нуля.

Пять мифов, которые мешают готовиться

Миф первый: «Нужно знать всё». Нет. Нужно знать то, что проверяют. Кодификатор перечисляет темы. Их не бесконечное множество. В этой книге они разобраны полностью, и этого достаточно для хорошего результата.

Миф второй: «Главное — формулы». Формулы нужны, но половина ошибок — не в формулах, а в чтении условия. Ученик правильно применяет теорему Пифагора, но берёт не ту сторону. Или считает проценты от новой цены вместо старой. Формула не спасает от невнимательности.

Миф третий: «Геометрию невозможно понять, её надо зубрить». Геометрия как раз понимается лучше алгебры: её можно увидеть. Проблема в другом — в школе на неё не хватает времени. Пять заданий первой части и три задания второй стоят дорого. Их стоит разобрать отдельно, что мы и сделаем в главах 9–11.

Миф четвёртый: «Часть 2 — только для отличников». Задание 20 обычно решает ученик с крепкой тройкой. Задание 23 — тоже, если умеет строить чертёж. Не отдавайте двенадцать баллов заранее. Даже два решённых задания второй части меняют картину.

Миф пятый: «Если я ошибся на пробнике, на экзамене будет то же самое». Пробник показывает, где пробел. Он не предсказывает результат. Ошибки на пробнике — это список тем, которые нужно подтянуть, а не приговор.

Что важно понять про формат

ОГЭ по математике — экзамен на скорость и точность, а не на глубину. Здесь не спрашивают доказательство теоремы Ферма. Здесь спрашивают, умеете ли вы довести до конца стандартную задачу за разумное время.

Это хорошая новость. Стандартные задачи тренируются. Скорость растёт от повторения. Точность — от привычки проверять.

Плохая новость в том, что «примерно правильный» ответ не считается. В первой части ответ либо совпал, либо нет. Во второй — либо рассуждение понятно, либо нет. Никаких «я хотел написать другое».

В 2027 году:

число заданий не изменилось;

максимальный балл не изменился;

время не изменилось;

темы не изменились;

критерии части 2 не изменились.

Это хорошая новость для тех, кто начал готовиться заранее: старые тренировочные варианты подходят. Плохая новость для тех, кто искал «новые лёгкие задания»: их нет.

Первое практическое задание

Прежде чем идти дальше, сделайте простую вещь. Возьмите лист и выпишите:

1. Сколько баллов вам нужно для цели.
2. Какие пять тем вы считаете самыми слабыми.
3. Сколько минут в день вы реально можете заниматься.

Не «два часа», а реально. Если получается двадцать минут — пишите двадцать. Лучше двадцать минут каждый день, чем два часа раз в неделю.

Эта запись будет вашим планом. Через месяц вернитесь к ней и посмотрите, что изменилось.

Как устроен бланк

На экзамене вы получаете два бланка. В первый записывают краткие ответы, во второй — решения заданий 20–25. Черновики тоже выдают, но их не проверяют.

Бланк N 1 разлинован на клетки. Под каждое задание отведено поле. Ответ вписывают с первой клетки, без пробелов, запятых между цифрами и лишних знаков. Если ответ — отрицательное число, минус ставится в отдельной клетке. Если ответ — дробь, её записывают в виде десятичной, если в условии не сказано иное.

Типичные технические ошибки:

ответ записан не под тем номером;

минус потерян или поставлен в клетку для цифры;

десятичная дробь записана через запятую, а клетки не предназначены для запятой;

последовательность цифр записана с пробелами;

ответ исправлен, но старая цифра не зачёркнута.

Проверка бланка занимает пять минут и спасает больше баллов, чем ещё одна решённая задача. Сверяйте номер задания с номером строки. Особенно если вы решали в произвольном порядке.

Бланк N 2 — чистые листы в клетку. Решения пишут ручкой, чертежи можно карандашом. Эксперт видит только то, что вы написали. Никаких «я это имел в виду» не существует.

Что происходит в аудитории

За полчаса до начала вас запускают в аудиторию. Телефоны сдают или оставляют в специальном месте. Проверяют документы. Рассылают материалы. Инструктаж занимает десять-пятнадцать минут.

В это время нельзя открывать КИМ. Пакет вскрывают по команде. Если вы откроете раньше, организатор может сделать замечание, а в спорной ситуации — удалить с экзамена. Не рискуйте из-за тридцати секунд.

После вскрытия проверьте комплект: бланки, КИМ, справочные материалы. Если чего-то не хватает, поднимите руку сразу. Потом будет сложнее доказать, что линейки не было.

В аудитории есть часы. Если часов нет, спросите время у организатора в начале. Дальше следите за ним сами: организатор не обязан напоминать.

Выйти в туалет можно, но время не останавливается. Выход занимает пять-десять минут. Если чувствуете, что теряете концентрацию, лучше выйти в середине работы, а не в конце, когда каждая минута на счету.

Стратегия для разных целей

Цель — перейти порог. Нужно около восьми первичных баллов. Это задания 1–5 и три-четыре задания из 6–19. Не тратьте время на часть 2, пока не забрали эти баллы. Практический блок и простые темы дают порог с запасом.

Цель — «четвёрка». Нужно 15–21 балл. Это почти вся первая часть без грубых ошибок плюс одно-два задания второй. Слабые места: геометрия и задания с параметром. Если геометрия проседает, добирайте алгеброй, но помните про условие по геометрическим баллам в вашем регионе.

Цель — «пятёрка». Нужно 22–31. Здесь нельзя терять первую часть и нужно решать минимум три задания второй. Обычно это 20, 21 и 23. Задания 22 и 25 — для максимального результата.

Цель — максимум. 30–31 балл. Нужны все задания первой части и пять-шесть заданий второй. Это уровень, при котором ошибка в арифметике стоит дороже, чем нерешённая сложная задача. Проверка становится главным навыком.

Календарь подготовки

Три месяца и больше. Один раз в неделю — полный вариант по времени. Остальные дни — темы по слабым местам. Каждые две недели — контрольная точка: сравнить результат с предыдущим.

Один месяц. Две недели на слабые темы, неделя на часть 2, неделя на пробники и повторение. Новые темы не начинать после третьей недели.

Две недели. Три полных варианта, разбор ошибок, повторение формул. Каждый день — двадцать-тридцать минут на одну тему. Не пытайтесь объять всё.

Неделя. Один полный вариант, разбор, чек-листы. Сон важнее зубрёжки. За день до экзамена — только лёгкое повторение.

План — это не список «пройти всё». Это список конкретных действий с проверкой.

Плохой план: «повторить геометрию». Хороший: «в понедельник разобрать задание 15, во вторник решить пять задач на биссектрису, в среду проверить по ответам».

Плохой план: «решать варианты». Хороший: «в субботу полный вариант по времени, в воскресенье разбор ошибок».

Разница в том, что хороший план можно проверить. Вы либо сделали, либо нет. Плохой план нельзя проверить, потому что непонятно, что считать результатом.

Вот пример недели для ученика с целью 16–18 баллов.

День
Действие
Проверка

Пн
Задания 1–5, один сюжет
5 из 5

Вт
Уравнения, 10 штук
8 из 10

Ср
Геометрия, треугольники
4 из 5

Чт
Графики, задание 11
3 из 3

Пт
Вероятность
4 из 5

Сб
Полный вариант
по времени

Вс
Разбор ошибок
список тем

Если в среду получилось 2 из 5, план на четверг меняется: вы возвращаетесь к треугольникам, а не идёте дальше. План — не догма, а маршрут с контрольными точками.

Как читать спецификацию

Спецификация — это документ, который описывает экзамен. Он кажется скучным, но именно там ответы на вопросы, которые задают родители.

Что искать в спецификации:

1. Число заданий и баллов.
2. Время.
3. Распределение по темам.
4. Разрешённые материалы.
5. Критерии оценивания.
6. Изменения по сравнению с прошлым годом.

В 2027 году по математике изменений нет. Это значит, что можно спокойно использовать варианты прошлых лет для тренировки. Структура та же: 19 + 6, 31 балл.

Типичная ошибка. Читают только демоверсию и не смотрят спецификацию. Демоверсия показывает примеры, спецификация — правила. На экзамене важны правила.

Частые вопросы родителей

«Можно ли подготовиться за месяц?» Да, если есть база. За месяц можно поднять результат на 4–7 баллов, если заниматься системно. С нуля — вряд ли.

«Нужен ли репетитор?» Не всегда. Если ребёнок умеет читать и работать самостоятельно, книга и тренировки заменяют репетитора. Если нет — нужен взрослый рядом.

«Почему ребёнок решает дома, а на экзамене теряется?» Потому что дома нет времени и тревоги. Тренируйтесь по времени. Пробники важнее домашних задач.

«Что делать, если математика не даётся?» Идти от простого. Практический блок, числа, вероятность, геометрия базового уровня. Порог реально перейти без гениальности.

«Можно ли пользоваться калькулятором?» Нет. Только линейка и справочные материалы.

Ошибки в стратегии

Ошибка 1. Учить всё подряд. Тем много, времени мало. Сначала те темы, которые дают больше баллов и чаще встречаются.

Ошибка 2. Игнорировать геометрию. Пять заданий в первой части и три во второй. Это треть экзамена.

Ошибка 3. Решать только первую часть. Если цель — «четвёрка» или «пятёрка», часть 2 нужна. Задание 20 часто доступно.

Ошибка 4. Не тренировать время. Знание без скорости на экзамене стоит меньше.

Ошибка 5. Не проверять ответы. Проверка — это отдельный навык. Его тоже тренируют.

Практикум: собери план

Возьмите лист и заполните таблицу.

Что
Мой ответ

Цель по баллам

Сколько времени в день

Три слабые темы

Две сильные темы

Когда пробник

План без цифр — это мечта. План с цифрами — это расписание.

Пример. Цель 18 баллов. Время 30 минут в день. Слабые: геометрия, вероятность, графики. Сильные: уравнения, числа. Пробник через две недели. Дальше — по этому плану.

Представьте: на пробнике вы пропустили задание 17. Потом посмотрели ответ и поняли, что задача простая. Почему пропустили?

Причины бывают разные:

1. Не поняли условие. Тогда тренируйте чтение, а не формулы.
2. Не знали свойства средней линии. Тогда повторите тему.
3. Застряли на предыдущем задании и не дошли. Тогда меняйте порядок.
4. Испугались слова «трапеция». Тогда разберите пять простых трапеций подряд.

Ошибка — это не «я тупой». Ошибка — это информация о конкретном навыке, которого не хватило. Чем точнее вы назовёте причину, тем быстрее исправите.

Как понять, что готов

Готовность — не «всё знаю», а «стабильно набираю нужный балл». Проверка простая: три пробника подряд с результатом не ниже цели. Если разброс большой, готовность нестабильна.

Ещё один признак: вы понимаете, почему решили именно так. Если ответ получился случайно, это не готовность.

И последнее: вы умеете бросать задачу. Это звучит странно, но на экзамене умение вовремя переключиться спасает баллы.

День перед экзаменом

Не решайте новый вариант. Не учите новую тему. Не сидите до ночи.

Сделайте три вещи:

1. Просмотрите формулы и чек-листы. Пятнадцать-двадцать минут, не больше.
2. Соберите вещи: ручки, карандаш, линейка, документы.
3. Лягте спать вовремя.

Уставший мозг теряет больше баллов, чем невыученная формула. Это не красивая фраза, а наблюдение из практики. На экзамене важна не только память, но и скорость обработки. Она падает, когда вы не спали.

Чек-лист главы

25 заданий: 19 с кратким ответом, 6 с развёрнутым.

31 первичный балл, 235 минут.

Первая часть — 19 баллов, вторая — 12.

Геометрия в первой части — 5 заданий, во второй — 3.

Задание 20 — самое доступное из второй части.

Два балла во второй части дают за понятное решение с верным ответом, а не за «правильную мысль».

Сначала дешёвые баллы, потом дорогие.

Проверка — обязательная часть работы, а не роскошь.

Теперь перейдём к заданиям 1–5. Там пять баллов, которые лежат ближе всего.

Глава 2. Задания 1–5: практический блок

Пять заданий из девятнадцати — это четверть первой части. И самые обидные потери: текст про шины или участок читается легко, ученик расслабляется, а потом теряет три балла на единицах измерения.

Практический блок устроен не так, как остальные задания. Здесь нет темы «квадратные уравнения» или «теорема Пифагора». Здесь есть сюжет и пять вопросов вокруг него. Сюжет может быть про что угодно: автомобильные шины, печь для бани, дачный участок, квартиру, тариф мобильной связи, страховой полис, зонт, теплицу. Меняется декорация, не меняется навык.

Навык называется «прочитать задачу и достать из неё числа». Звучит просто. На практике именно здесь чаще всего путают миллиметры с сантиметрами, проценты с дробями и радиус с диаметром.

Универсальный алгоритм

Я даю его каждому ученику и прошу выучить до автоматизма. Пять шагов.

Шаг 1. Прочитать весь текст до вопросов. Не начинайте с первого вопроса. Прочитайте описание целиком, даже если оно длинное. В тексте спрятаны определения и связи, без которых вопросы не решаются.

Шаг 2. Выписать данные. Не держите числа в голове. На черновике — таблица: величина, значение, единица. Если в тексте есть таблица или рисунок, перепишите нужные строки.

Шаг 3. Понять, что спрашивают. Подчеркните в вопросе последнюю фразу. Там обычно указано, что найти и в каких единицах. «Ответ дайте в миллиметрах» — это не украшение, а условие.

Шаг 4. Выбрать формулу. Если формула дана в тексте — используйте её буквально, подставив числа. Если не дана — вспомните базовую: площадь прямоугольника, длина окружности, периметр, стоимость.

Шаг 5. Проверить единицы и здравый смысл. Диаметр колеса не может быть 63 миллиметра. Площадь квартиры не может быть 640 квадратных метров. Стоимость не может быть отрицательной. Если ответ выглядит странно, ищите ошибку в переводе единиц.

Пятый шаг спасает больше баллов, чем первые четыре вместе.

Проценты: три типа задач

В практическом блоке проценты встречаются постоянно. Есть три базовых вопроса, и их легко перепутать.

Найти процент от числа. «Найдите 15% от 2400». Решение: 2400 x 0,15 = 360.

Найти число по его проценту. «18% некоторой суммы равны 360. Найдите сумму». Решение: 360 : 0,18 = 2000.

Найти, сколько процентов одно число составляет от другого. «Найдите, сколько процентов 45 составляет от 300». Решение: 45 : 300 x 100 = 15%.

Главная ловушка — база. Процент всегда считается от чего-то. Если цену повысили на 20%, а потом понизили на 20%, цена не вернулась к исходной. Первое повышение считается от старой цены, второе понижение — от новой, которая уже больше.

Проверим. Товар стоил 1000 рублей. После повышения на 20% — 1200. После понижения на 20% от 1200 — 960. Итог: на 4% меньше исходного. Не ноль.

В заданиях 1–5 эта ловушка встречается в сюжетах про тарифы, скидки, пробег и стоимость материалов.

Сложные проценты встречаются не только в банке. Пример: стоимость интернета 600 рублей в месяц. В январе подняли на 10%, в июле дали скидку 15% от новой цены. Сколько платить после скидки?

600 x 1,1 = 660.

660 x 0,85 = 561.

Ответ: 561 рубль. Заметьте: итог ниже исходного, потому что скидка считалась от повышенной цены, но процент скидки больше процента повышения.

Другой пример: товар подешевел на 20%, потом подорожал на 20%. Итог: 0,8 x 1,2 = 0,96, то есть на 4% ниже исходного. Симметрии нет, потому что базы разные.

Правило. Последовательные изменения перемножаются коэффициентами: +10% — это 1,1; -15% — это 0,85. Итоговый коэффициент 1,1 x 0,85 = 0,935.

Единицы измерения: таблица, которая экономит баллы

Величина
Основная единица
Частые переводы

Длина
метр
1 м = 100 см = 1000 мм; 1 дюйм = 25,4 мм

Площадь
квадратный метр
1 м^2 = 10 000 см^2

Время
минута
1 ч = 60 мин; 1 мин = 60 с

Масса
килограмм
1 кг = 1000 г; 1 т = 1000 кг

Скорость
км/ч
1 км/ч = 1000/3600 м/с

Две ошибки встречаются чаще остальных.

Первая: путают линейные и квадратные единицы. Если стороны увеличили в 2 раза, площадь выросла в 4 раза, а не в 2. Если диаметр колеса вырос на 5%, длина окружности выросла тоже на 5% — здесь зависимость линейная. А вот площадь круга выросла бы примерно на 10%.

Вторая: округляют слишком рано. Считайте в дробях или держите в калькуляторе больше знаков, округляйте только в конце. Если округлить промежуточный результат, финальный может уйти на единицу.

Разбор 1. Шины

Самый известный сюжет. Разберём его от начала до конца, потому что он показывает все типы вопросов сразу.

В тексте сказано: шина имеет маркировку 205/55 R16. Первое число — ширина шины в миллиметрах. Второе — высота боковины в процентах от ширины. Число после R — диаметр диска в дюймах. Один дюйм равен 25,4 мм.

Нужно найти высоту боковины, диаметр колеса и сравнить два размера.

Высота боковины. 55% от 205 мм. Считаем: 205 x 0,55 = 112,75 мм.

Диаметр диска в миллиметрах. 16 x 25,4 = 406,4 мм.

Общий диаметр колеса. Диск плюс две боковины — сверху и снизу. 406,4 + 2 x 112,75 = 406,4 + 225,5 = 631,9 мм.

Радиус. Половина диаметра: 631,9 : 2 = 315,95 мм.

Теперь сравним с шиной 215/60 R16.

Высота боковины: 215 x 0,60 = 129 мм. Диаметр диска тот же: 406,4 мм. Общий диаметр: 406,4 + 258 = 664,4 мм. Радиус: 332,2 мм.

Разница радиусов: 332,2 - 315,95 = 16,25 мм.

Разница диаметров: 664,4 - 631,9 = 32,5 мм. Заметьте: разница диаметров ровно в два раза больше разницы радиусов. Это не совпадение, а свойство окружности. Проверяйте себя этим соотношением.

Процент изменения пробега. За один оборот колесо проходит расстояние, равное длине окружности. Длина окружности пропорциональна диаметру. Значит, процент изменения пробега равен проценту изменения диаметра.

Считаем отношение: 664,4 : 631,9 = 1,05143. То есть диаметр вырос на 5,143%. Округляем до десятых: на 5,1%.

Обратите внимание на порядок действий. Мы не считали длину окружности через число пи. Оно сократилось. Это экономит время и уменьшает ошибку округления. В практическом блоке часто можно сравнивать отношения, не вычисляя абсолютные значения.

Типичная ошибка. Ученик берёт 55% от диаметра диска, а не от ширины. Или забывает умножить боковину на два. Или переводит дюймы в сантиметры и теряет множитель 10. Каждая из этих ошибок даёт неверный ответ, но выглядит «почти правильно».

Проверка здравым смыслом. Диаметр колеса легкового автомобиля — примерно 60–70 см. Наш результат 631,9 мм — 63 см. Нормально. Если получилось 6,3 см или 6,3 м, ищите ошибку.

Разбор 2. Дачный участок

Другой частый сюжет. На плане изображён участок прямоугольной формы. Стороны — 30 и 40 метров. На участке стоят дом 8 х 10, баня 4 х 4 и гараж 6 х 4. Нужно найти площади, количество плитки, длину забора и стоимость материалов.

Площадь участка. 30 х 40 = 1200 м^2.

Площадь дома. 8 х 10 = 80 м^2.

Площадь бани. 4 х 4 = 16 м^2.

Площадь гаража. 6 х 4 = 24 м^2.

Свободная площадь. 1200 - 80 - 16 - 24 = 1080 м^2.

Дальше вопрос может быть таким: сад занимает треть свободной площади. Найдите площадь сада. 1080 : 3 = 360 м^2.

Или таким: дорожка шириной 1 метр идёт по периметру участка внутри забора. Найдите площадь дорожки. Здесь нужно аккуратно: внешний прямоугольник 30 х 40, внутренний — 28 х 38. Площадь дорожки: 1200 - 28 х 38 = 1200 - 1064 = 136 м^2.

Проверим вторым способом. Две полосы по 40 х 1 и две по 28 х 1: 80 + 56 = 136. Совпало. Хороший признак.

Плитка. Дорожку выкладывают плиткой 30 х 30 см. Площадь одной плитки: 0,3 х 0,3 = 0,09 м^2. Количество: 136 : 0,09 = 1511,1... Нужно целое число, значит 1512 плиток. Если плитка продаётся упаковками по 20 штук, нужно 76 упаковок: 1512 : 20 = 75,6, округляем вверх.

Округление вверх — важная привычка. Нельзя купить 75,6 упаковки. Нельзя уложить 1511,1 плитки. В задачах про материалы округление всегда в большую сторону, если спрашивают «сколько нужно купить».

Забор. Периметр участка: 2 х (30 + 40) = 140 метров. Если в заборе есть ворота шириной 3,5 метра и калитка 1 метр, длина забора: 140 - 3,5 - 1 = 135,5 метра. Стоимость при цене 850 рублей за метр: 135,5 х 850 = 115 175 рублей.

Типичная ошибка. Считают площадь участка в сантиметрах или путают периметр с площадью. Ещё одна: вычитают ворота из площади, а не из длины. Читайте, что именно измеряется.

Теплица имеет форму прямоугольного параллелепипеда с двускатной крышей. Размеры основания 3 х 6 метров, высота стен 2 метра, высота конька 3 метра. Нужно найти площадь плёнки на боковые стены и крышу.

Боковые стены. Две стены 3 х 2 и две стены 6 х 2. Площадь: 2 х 6 + 2 х 12 = 12 + 24 = 36 м^2.

Крыша. Два прямоугольника. Ширина каждого — половина пролёта, то есть 1,5 метра, но с учётом подъёма конька длина ската считается по теореме Пифагора: sqrt(1,5^2 + 1^2) = sqrt3,25 ~= 1,8 м. Длина ската 6 метров. Площадь двух скатов: 2 х 1,8 х 6 = 21,6 м^2.

Всего плёнки. 36 + 21,6 = 57,6 м^2. С запасом 10%: 63,36 м^2. Округляем вверх до целого: 64 м^2.

Типичная ошибка. Считают крышу как 3 х 6 = 18 м^2, забывая, что скат длиннее половины пролёта. Или не добавляют запас, хотя в условии сказано «с запасом 10%».

Разбор 3. Тарифы

Сюжет про мобильную связь или интернет. Дана таблица тарифов: абонентская плата, включённые минуты, гигабайты, цена сверх пакета. Нужно выбрать самый дешёвый вариант для заданного расхода.

Алгоритм простой. Для каждого тарифа считаем: абонентская плата плюс превышение по минутам плюс превышение по гигабайтам. Сравниваем суммы.

Пример. Три тарифа.

Тариф
Плата
Минуты
ГБ
Минута сверх
ГБ сверх

А
450
300
20
3
120

Б
600
500
30
2
100

В
800
800
50
1
80

Расход: 420 минут, 26 ГБ.

Тариф А: 450 + (420 - 300) x 3 + (26 - 20) x 120 = 450 + 360 + 720 = 1530 рублей.

Тариф Б: 600 + 0 + 0 = 600 рублей. Всё уложилось в пакет.

Тариф В: 800 рублей. Пакет больше, но плата выше.

Самый дешёвый — Б, 600 рублей.

Типичная ошибка. Сравнивают только абонентскую плату. Или считают превышение по всем минутам, а не только сверх пакета. Или забывают, что гигабайты тоже могут выйти за пакет.

Проверка. Ответ должен быть не меньше минимальной абонентской платы и не больше суммы «плата плюс все превышения». Если получилось 300 рублей при плате 450 — ошибка.

Разбор 4. Квартира

На плане квартиры указаны комнаты, коридор, кухня, санузел. Нужно найти площадь комнаты, количество рулонов обоев, стоимость ламината.

Площадь комнаты. Если на плане размеры в метрах, перемножаем длину и ширину. Если в сантиметрах — переводим. Если комната имеет выступ, делим её на прямоугольники и складываем площади.

Обои. Считаем периметр комнаты, умножаем на высоту, вычитаем площадь двери и окон. Делим на площадь одного рулона. Округляем вверх.

Пример. Комната 4 х 5 метров, высота 2,7 метра. Дверь 0,9 х 2,1, окно 1,5 х 1,4.

Площадь стен: 2 х (4 + 5) х 2,7 = 48,6 м^2.

Дверь: 0,9 х 2,1 = 1,89 м^2. Окно: 1,5 х 1,4 = 2,1 м^2. Вместе 3,99 м^2.

Оклеиваемая площадь: 48,6 - 3,99 = 44,61 м^2.

Рулон 1,06 х 10 метров даёт 10,6 м^2. Количество: 44,61 : 10,6 = 4,21. Округляем вверх: 5 рулонов.

Важно: в реальной жизни учитывают рисунок и подгонку. В экзаменационной задаче об этом либо сказано отдельно, либо не требуется. Читайте условие.

Ламинат. Площадь комнаты делим на площадь упаковки, округляем вверх, добавляем запас, если он указан в условии.

Разбор 5. Печь

Сюжет про банную печь. Даны размеры, масса, расход дров, время нагрева. Вопросы: объём, масса, стоимость, время.

Здесь важно не путать объём и площадь. Объём прямоугольного параллелепипеда: длина х ширина х высота. Единица — кубический метр. Площадь поверхности — сумма площадей граней, единица — квадратный метр.

Пример. Печь имеет форму прямоугольного параллелепипеда 0,6 х 0,5 х 0,8 метра. Объём: 0,6 х 0,5 х 0,8 = 0,24 м^3.

Масса при плотности кирпича 1800 кг/м^3: 0,24 х 1800 = 432 кг. Но печь не сплошная, внутри топка. В задаче обычно дают готовую массу или долю заполнения. Читайте внимательно.

Типичная ошибка. Умножают все три размера, чтобы найти площадь. Или складывают вместо умножения. Или забывают перевести сантиметры в метры.

В тексте сказано: печь имеет форму прямоугольного параллелепипеда, длина 0,8 м, ширина 0,6 м, высота 0,7 м. Внутри топка объёмом 0,1 м^3. Плотность кирпича 1800 кг/м^3. Нужно найти объём кладки, массу печи и стоимость кирпича, если один кирпич весит 3,5 кг, а цена 25 рублей за штуку.

Объём печи целиком. 0,8 х 0,6 х 0,7 = 0,336 м^3.

Объём кладки. 0,336 - 0,1 = 0,236 м^3.

Масса. 0,236 х 1800 = 424,8 кг.

Количество кирпичей. 424,8 : 3,5 = 121,37. Округляем вверх: 122 кирпича.

Стоимость. 122 х 25 = 3050 рублей.

Проверка порядка: печь весит около 425 кг, это правдоподобно. Кирпичей около 120, тоже нормально. Если получилось 12 000 кирпичей, ошибка в объёме или плотности.

Типичная ошибка. Считают объём, умножая все три размера, но забывают вычесть топку. Или переводят сантиметры в метры неправильно: 80 см — это 0,8 м, а не 8 м.

Общий приём: таблица данных

Когда текст большой, я советую рисовать таблицу на черновике. Не в уме, а руками.

Что известно
Значение
Единица

Ширина
205
мм

Профиль
55
%

Диск
16
дюйм

Дюйм
25,4
мм

Такая таблица занимает полминуты, но снимает половину ошибок. Особенно когда вопросов пять и данные используются повторно.

Как проверять ответ в практическом блоке

Три быстрые проверки.

Проверка порядка. Диаметр колеса — сотни миллиметров. Площадь участка — сотни или тысячи квадратных метров. Стоимость — тысячи рублей. Если цифра на порядок отличается, ошибка.

Проверка единиц. В вопросе просят миллиметры, а вы считали в сантиметрах? Умножьте на 10. Просят метры, а считали в сантиметрах? Разделите на 100.

Проверка действия. «На сколько больше» — вычитание. «Во сколько раз больше» — деление. «Сколько процентов» — деление на базу и умножение на 100. Перепутать эти три вопроса легче, чем кажется.

Пять вопросов, которые стоит задать себе после решения заданий 1–5:

1. В каких единицах ответ? Совпадает с вопросом?
2. Не перепутал ли я радиус и диаметр?
3. Не посчитал ли я процент от другой базы?
4. Округлил ли я в нужную сторону?
5. Похож ли ответ на правду?

Если хотя бы один ответ «не уверен», пересчитайте. Пять баллов стоят пяти минут проверки.

Масштаб плана

В заданиях 1–5 часто дан план, где одна клетка равна нескольким метрам. Пример: план участка на клетчатой бумаге, сторона клетки 2 метра. Дом занимает прямоугольник 4 х 3 клетки. Его реальные размеры: 8 х 6 метров, площадь 48 м^2.

Если нужно найти расстояние между объектами, считаем клетки, затем умножаем на масштаб. Если объекты расположены по диагонали, применяем Пифагор в клетках, потом умножаем.

Типичная ошибка. Считают площадь в клетках и забывают возвести масштаб в квадрат. Одна клетка 2 метра, значит, одна квадратная клетка — 4 м^2, а не 2 м^2. Площадь дома в клетках 12, в метрах — 12 х 4 = 48 м^2.

Округление: когда вверх, когда вниз

В практических задачах округление — часть ответа.

Материалы (плитка, рулоны, упаковки, кирпичи) — всегда вверх. Нельзя купить часть упаковки.

Деньги — до копеек или до рублей, как сказано в условии.

Время — до минут или часов, как сказано.

Проценты — до десятых или целых, как сказано.

Если в условии нет указания, смотрите на смысл. «Сколько упаковок нужно» — вверх. «Сколько упаковок можно купить на 5000 рублей» — вниз.

Типичная ошибка. Округляют вниз, потому что «так красивее». В результате не хватает материала. Или округляют промежуточный результат, и финальный уезжает на единицу.

Практикум: ещё один сюжет

На участке 20 х 30 метров строят бассейн 5 х 4 метра и беседку 3 х 3 метра. Дорожка шириной 1 метр идёт вокруг бассейна. Плитка для дорожки — 25 х 25 см, продаётся упаковками по 16 штук. Сколько упаковок нужно?

Площадь бассейна с дорожкой. Внешний прямоугольник: (5 + 2) х (4 + 2) = 7 х 6 = 42 м^2. Площадь бассейна: 20 м^2. Площадь дорожки: 22 м^2.

Площадь одной плитки. 0,25 х 0,25 = 0,0625 м^2.

Количество плиток. 22 : 0,0625 = 352.

Упаковки. 352 : 16 = 22. Ровно 22 упаковки.

Проверка. 22 упаковки х 16 = 352 плитки. Площадь 352 х 0,0625 = 22 м^2. Сходится.

Сюжет со страховкой

В практическом блоке встречаются задачи про полисы. Текст даёт таблицу коэффициентов, возраст водителя, стаж и мощность двигателя. Нужно найти стоимость полиса.

Алгоритм:

1. Найдите базовую ставку.
2. Умножьте на коэффициент территории.
3. Умножьте на коэффициент возраста и стажа.
4. Умножьте на коэффициент мощности.
5. Если есть скидка за безаварийность, умножьте на неё.

Пример. Базовая ставка 5000 рублей. Территория 1,4. Возраст и стаж 1,2. Мощность 1,1. Скидка 0,95.

5000 x 1,4 = 7000.

7000 x 1,2 = 8400.

8400 x 1,1 = 9240.

9240 x 0,95 = 8778.

Ответ: 8778 рублей.

Типичная ошибка. Складывают коэффициенты вместо умножения. Или применяют скидку до повышающих коэффициентов. Порядок умножения не влияет на результат, но пропущенный коэффициент влияет.

Сюжет с зонтом

Зонт-трость имеет восемь спиц. Диаметр купола 100 см. Нужно найти длину спицы, если она идёт от центра до края.

Радиус равен половине диаметра: 50 см. Длина спицы примерно равна радиусу, если спица прямая. Ответ 50 см.

Если спица крепится не в центре, а на расстоянии 5 см от центра, длина спицы 45 см. Читайте, откуда идёт спица.

Типичная ошибка. Берут диаметр вместо радиуса. Или не читают, где крепится спица.

Ошибки в единицах: разбор

Ошибка 1. Площадь участка 20 х 30 метров считают как 20 х 30 = 600 сантиметров. Нужно 600 квадратных метров.

Ошибка 2. Длину забора считают в квадратных метрах. Забор — это длина, метры.

Ошибка 3. Объём бассейна 2 х 3 х 1,5 метра считают как 9 метров. Нужно 9 кубических метров.

Ошибка 4. Плитку 20 х 20 см считают как 20 х 20 = 400 м^2. Нужно перевести в метры: 0,2 х 0,2 = 0,04 м^2.

Ошибка 5. Процент от суммы считают от новой суммы, а условие говорит о старой. Читайте, от чего считается процент.

Тренировка

1. Шина 185/65 R15. Найдите высоту боковины в миллиметрах.

2. Для этой же шины найдите диаметр колеса в миллиметрах.

3. Шина 195/60 R15. На сколько миллиметров её диаметр больше диаметра шины 185/65 R15?

4. Участок 25 х 36 метров. Найдите площадь и периметр.

5. Дорожка площадью 54 м^2 выложена плиткой 20 х 20 см. Сколько плиток нужно?

6. Тариф: 500 рублей, 400 минут, 25 ГБ. Минута сверх пакета — 2,5 рубля, гигабайт — 150 рублей. Абонент израсходовал 460 минут и 28 ГБ. Сколько он заплатит?

7. Комната 3,5 х 4,2 метра, высота 2,6 метра. Дверь 0,8 х 2,0, окно 1,4 х 1,5. Сколько квадратных метров стен нужно оклеить?

8. Цену товара повысили на 15%, потом понизили на 15%. На сколько процентов итоговая цена отличается от исходной?

Ответы

1. 185 х 0,65 = 120,25 мм.
2. 15 х 25,4 = 381 мм; 381 + 2 х 120,25 = 621,5 мм.
3. 195 х 0,6 = 117 мм; 381 + 234 = 615 мм. Разница: 621,5 - 615 = 6,5 мм.
4. Площадь 900 м^2, периметр 122 м.
5. Площадь плитки 0,04 м^2; 54 : 0,04 = 1350 плиток.
6. 500 + 60 х 2,5 + 3 х 150 = 500 + 150 + 450 = 1100 рублей.
7. Периметр 15,4 м; площадь стен 40,04 м^2; дверь 1,6 м^2; окно 2,1 м^2; оклеить 36,34 м^2.
8. 1000 -> 1150 -> 977,5. Ниже исходной на 2,25%.

Чек-лист главы

Прочитайте весь текст до вопросов.
Выпишите данные в таблицу с единицами.
Подчеркните, что именно спрашивают и в каких единицах.
Проценты считайте от правильной базы.
Линейные и квадратные единицы не путайте.
Материалы округляйте вверх.
Проверяйте порядок величины и здравый смысл.
Пять баллов здесь — самые доступные на экзамене. Не оставляйте их на «потом».

Глава 3. Числа и вычисления. Алгебраические выражения

Задание 6 — точка, где видно, готов ли ученик к остальным двадцати четырём. Не потому, что оно сложное. Потому, что оно бытовое: посчитать, сократить, подставить, не потерять минус. Здесь нет идей, которые надо долго понимать. Здесь есть навык, который либо натренирован, либо нет.

Я говорю на первом занятии: калькулятор на экзамене запрещён, разрешены линейка и справочные формулы. Значит, вся арифметика проходит через голову и бумагу. И если 2,4 х 0,15 вы считаете три минуты, вы теряете время у всех остальных заданий.

Один балл за задание 6 — дешёвый балл. Но за ним стоит умение, без которого часть 2 не пишется вообще.

Что проверяет задание 6

Задание 6 проверяет три вещи, и путать их не надо.

Первое — действия с числами. Обыкновенные и десятичные дроби, смешанные числа, порядок действий, знаки.

Второе — степени и корни. Свойства, отрицательные показатели, вынесение множителя, сравнение корней.

Третье — преобразование выражений. Формулы сокращённого умножения, разложение на множители, подстановка числа.

Ответ в бланк идёт кратко: число, без решения и без пояснений. Поэтому вся цена ошибки — один неверный знак в середине цепочки.

Проверьте себя прямо сейчас. Если вы не можете без бумаги ответить, чему равно 3^-^2, сколько будет sqrt50 и как разложить x^2 - 9, дальше читать рано. Сначала закройте эти три дырки.

Вот как выглядит полный проход по простому примеру. Найдите значение выражения (1,6 : 0,4 - 2,5) x 3,2. Смотрю на структуру: скобка, внутри деление и вычитание, снаружи умножение. 1,6 : 0,4 = 4. 4 - 2,5 = 1,5. 1,5 x 3,2 = 4,8. Четыре строчки, ни одной формулы. Именно в таких цепочках теряют баллы чаще, чем в квадратных уравнениях.

Второй пример посложнее: (0,6 : 3/5 + 1,4) x 2^-^1. Перевожу 3/5 в 0,6, делю: 0,6 : 0,6 = 1. В скобке 1 + 1,4 = 2,4. Умножаю на 1/2: 1,2. Здесь проверяются сразу дроби, десятичные и отрицательная степень — типичный набор для задания 6.

Типичная ошибка. Ученик видит длинное выражение и начинает считать всё подряд, слева направо. Через минуту тонет в числах и бросает. Я требую другое: сначала посмотреть на структуру. Есть формула? Есть общий множитель? Есть возможность сократить? Считать — последний шаг, а не первый.

Порядок действий и знаки

Правило знают все. Нарушают почти все.

1. Скобки — изнутри наружу.
2. Степени и корни.
3. Умножение и деление — слева направо.
4. Сложение и вычитание — слева направо.

Слова «слева направо» — не украшение. В выражении 12 : 3 x 2 нельзя сначала перемножить 3 и 2. Деление и умножение равноправны: 12 : 3 = 4, потом 4 x 2 = 8. Если сделать наоборот, выйдет 12 : 6 = 2. Ошибка в четыре раза.

То же с вычитанием: 10 - 4 + 3 = 9, а не 10 - 7 = 3.

Пример. 20 - 3 x 4 = 20 - 12 = 8. Не 68 и не 17.

Пример. 2 + 3 x 4^2 = 2 + 3 x 16 = 50. Сначала степень, потом умножение, потом сложение.

Пример. 36 : 6 : 2 = 6 : 2 = 3. Действия идут цепочкой, а не «6 : (6 : 2)».

Пример. 1 - (2 - 3 x 4) = 1 - (2 - 12) = 1 - (-10) = 11. Внутри скобки сначала умножение.

Отдельно про степень и минус. Запись -5^2 читается как «минус (5 в квадрате)», то есть -25. Запись (-5)^2 — «минус пять в квадрате», то есть 25. Скобка меняет всё. Я видела, как на этом теряли балл в задании 6 и потом ещё раз в графике.

Дробная черта держит скобки. Выражение (2 + 4)/(1 + 2) равно 2, потому что сначала считаются числитель и знаменатель. Если записать то же в строчку без скобок, 2 + 4/1 + 2, получится 8. Дробная черта — это не просто «поделить», это граница двух выражений.

Пример. (5 - 2^2)/(3^2 - 5) = (5 - 4)/(9 - 5) = 1/4. В числителе степень стоит внутри разности, в знаменателе тоже. Пока не посчитаны оба, делить нельзя.

Минус перед скобкой. Он меняет знак у каждого слагаемого внутри, а не только у первого.

7 - (3x - 4) = 7 - 3x + 4 = 11 - 3x.

Если внутри три слагаемых, меняются все три. Я советую после раскрытия подчеркнуть каждое слагаемое и отдельно проверить его знак. Десять секунд работы, один спасённый балл.

Пять ошибок, которые я встречаю каждую неделю.

1. 8 - 2 x 3 = 18. Нет: 8 - 6 = 2.
2. 12 : 3 x 2 = 2. Нет: 4 x 2 = 8.
3. -3^2 = 9. Нет: -9.
4. 5 - (2 - 7) = -4. Нет: 5 - 2 + 7 = 10.
5. 2 + 3 x 4 = 20. Нет: 14.

Есть простой приём — два прохода. Первый проход: расставить над выражением порядок действий карандашом. Второй: считать. На экзамене это занимает полминуты и снимает половину глупых потерь.

Проверка знака. До вычислений я прошу назвать знак будущего ответа. Если выражение положительно, а результат вышел с минусом, ошибка в знаке. Если дробь меньше единицы, а ответ больше, ошибка в запятой. Пять секунд, и грубый промах виден.

Обыкновенные дроби

Четыре действия — четыре правила. Ничего больше в этой теме не нужно, но эти четыре надо довести до автоматизма.

Сложение и вычитание. Общий знаменатель, затем числители.

3/4 + 5/6 = 9/12 + 10/12 = 19/12 = 1 7/12.

Умножение. Числитель на числитель, знаменатель на знаменатель. Сокращать лучше до умножения, числа будут меньше.

6/7 x 14/15. Сокращаем 6 и 15 на 3, 14 и 7 на 7: (2 x 2)/(1 x 5) = 4/5.

Деление. Перевернуть вторую дробь и умножить.

3/5 : 9/10 = 3/5 x 10/9 = 30/45 = 2/3.

Смешанные числа. Перевести в неправильные дроби. Только потом считать.

2 3/4 - 1 1/2 = 11/4 - 3/2 = 11/4 - 6/4 = 5/4 = 1 1/4.

Многоэтажная дробь. Самый частый гость в задании 6.

(1/2 + 1/3)/(1/4 - 1/6).

Числитель: 5/6. Знаменатель: 3/12 - 2/12 = 1/12. Делим: 5/6 x 12/1 = 10.

Сравнение дробей. Приводим к общему знаменателю или перемножаем крест-накрест. Сравним 5/8 и 7/12: 5 x 12 = 60, 7 x 8 = 56. Первая дробь больше.

Доли и отношения. Отношение 2:3 значит, что частей пять, а не две и не три. Если стороны относятся как 2:5, я обозначаю их 2x и 5x: одна часть равна x, всего частей семь. Дальше подставляю в периметр или площадь.

Пример. Сплав из двух металлов в отношении 3:7, масса 500 г. Частей 10, одна часть 50 г, массы 150 г и 350 г.

Почему нужен общий знаменатель. Дроби — это доли разного размера. Пока доли разные, складывать числители бессмысленно: треть и половина — не две пятых. Общий знаменатель приводит обе дроби к одному размеру доли, и только тогда числители складываются.

Типичные ошибки.

1/2 + 1/3 = 2/5. Неверно. Половина плюс треть больше половины, а 2/5 меньше половины. Здравый смысл ловит ошибку раньше правила.

Сокращают до сложения: (1 + 2)/(2 + 3) = 3/5. Так нельзя: в числителе сумма, сокращать нечего.

Складывают целые и дробные части отдельно, а потом путаются со знаком. Через неправильные дроби надёжнее.

Десятичные дроби

Здесь всё решает запятая.

Сложение и вычитание. Запятая под запятой, разряды под разрядами. 3,75 + 12,4 = 16,15.

Умножение. Считаем без запятых, потом отделяем столько знаков, сколько их в обоих множителях.

0,25 x 0,4: 25 x 4 = 100, отделяем три знака, получаем 0,100 = 0,1.

Деление на десятичную дробь. Переносим запятую в делимом и делителе, пока делитель не станет целым.

4,5 : 0,9 = 45 : 9 = 5.

1,44 : 1,2 = 14,4 : 12 = 1,2.

Умножение и деление на 10, 100, 1000. Запятая идёт вправо при умножении и влево при делении.

3,7 x 100 = 370. 3,7 : 100 = 0,037.

Полезные пары. Их я прошу выучить наизусть, они экономят минуты.

0,5 = 1/2; 0,25 = 1/4; 0,75 = 3/4; 0,2 = 1/5; 0,125 = 1/8.

Отсюда быстрые ходы: умножить на 0,5 — значит разделить на 2; разделить на 0,5 — значит умножить на 2; умножить на 0,25 — значит разделить на 4.

0,125 x 8 = 1; 0,25 x 4 = 1. Эти пары удобно узнавать в выражениях: вместо деления на 0,125 можно умножить на 8.

Возведение в квадрат. 0,3^2 = 0,09, а не 0,9. Один знак после запятой в основании даёт два знака в квадрате.

Типичные ошибки.

0,5 x 0,2 = 0,01. Неверно: 5 x 2 = 10, знаков после запятой два, получаем 0,10 = 0,1.

Потеря нуля при делении на 100: 3,7 : 100 = 0,037, а не 0,37.

Запятая «под запятой» при сложении 3,75 + 12,4: ученик ставит 4 под 7, а не под 5 и получает неверный разряд. Второе число надо мысленно дополнить нулём: 12,40.

Степени и стандартный вид числа

Определение простое: a^n — произведение n множителей, каждый равен a. 2^4 = 2 x 2 x 2 x 2 = 16.

Свойства, которые нужны на экзамене:

Свойство
Формула

Умножение
a^m x a^n = a^m^+^n

Деление
a^m : a^n = a^m^-^n

Степень степени
(a^m)^n = a^m^n

Степень произведения
(ab)^n = a^nb^n

Отрицательная степень
a^-^n = 1/a^n

Нулевая степень
a^0 = 1, a /= 0

Почему a^0 = 1? Потому что a^n : a^n = a^0, а то же деление при a /= 0 даёт 1. Ноль в нулевой степени не определён, отсюда оговорка в таблице.

Отрицательный показатель. 2^-^3 = 1/2^3 = 1/8. Это не «минус восемь» и не «минус три». Отрицательный показатель не делает число отрицательным, он делает его дробным. Ошибка номер один в теме.

Обратный ход: 1/(2^-^3) = 2^3 = 8. Минус в показателе переворачивает дробь, а не меняет знак результата.

Дробь в степени. (2/3)^2 = 4/9: возводим и числитель, и знаменатель. При отрицательном показателе дробь переворачивается: (2/5)^-^2 = (5/2)^2 = 25/4 = 6,25.

Одинаковое основание. 4^3 x 2^5. Замечаем, что 4 = 2^2, значит 4^3 = 2^6. Дальше 2^6 x 2^5 = 2^1^1 = 2048. Считать 64 x 32 тоже можно, но дольше и рискованнее.

9^2 : 3^3 = 3^4 : 3^3 = 3.

25 x 5^-^3 = 5^2 x 5^-^3 = 5^-^1 = 0,2.

Сложение одинаковых степеней. 2^4 + 2^4 = 2 x 2^4 = 2^5. Это не 2^8: при сложении показатели не складываются.

Стандартный вид числа. Запись a x 10^n, где 1 <= a < 10.

3 400 000 = 3,4 x 10^6.

0,00052 = 5,2 x 10^-^4.

Зачем это нужно в задании 6? Чтобы не считать длинные нули руками:

(6,4 x 10^5) : (1,6 x 10^3) = (6,4 : 1,6) x 10^2 = 4 x 100 = 400.

Типичные ошибки.

2^3 x 3^3 = 6^6. Неверно: при одинаковых показателях перемножают основания, а показатель сохраняют: 6^3.

a^m x a^n = a^m^n. Неверно: при умножении показатели складываются.

10^-^4 — отрицательное число. Неверно: это 0,0001.

Корни

Квадратный корень из a — число, квадрат которого равен a. sqrt49 = 7, потому что 7^2 = 49.

Квадраты до 20 я прошу знать наизусть: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400.

Свойства:

sqrt(ab) = sqrta x sqrtb при a >= 0, b >= 0;

sqrt(a/b) = sqrta : sqrtb при a >= 0, b > 0;

(sqrta)^2 = a при a >= 0;

sqrt(a^2) = |a|.

Последняя строка важна. sqrt((-5)^2) = sqrt25 = 5, а не -5. Корень не выдаёт отрицательных значений.

С переменной то же самое: sqrt(x^2) = |x|, поэтому sqrt((x - 3)^2) = |x - 3|.

Область определения. Под корнем в ОГЭ стоит неотрицательное число. Выражение sqrt(x - 3) имеет смысл при x >= 3. В задании 6 это чаще всего не спрашивают, но при подстановке проверять стоит: если под корнем вышло отрицательное число, вы где-то ошиблись раньше.

Вынесение множителя. sqrt50 = sqrt(25 x 2) = 5sqrt2. sqrt72 = sqrt(36 x 2) = 6sqrt2.

Внесение множителя. 3sqrt2 = sqrt(9 x 2) = sqrt18.

Сложение. Складывать можно только одинаковые корни.

2sqrt8 + 3sqrt2 = 2 x 2sqrt2 + 3sqrt2 = 4sqrt2 + 3sqrt2 = 7sqrt2.

sqrt12 + sqrt27 - sqrt48 = 2sqrt3 + 3sqrt3 - 4sqrt3 = sqrt3.

Умножение. sqrt6 x sqrt10 = sqrt60 = 2sqrt15.

Деление. sqrt18 : sqrt2 = sqrt9 = 3.

Сравнение. Сравним 3sqrt2 и 4. Возводим оба в квадрат: 18 и 16. Значит, 3sqrt2 > 4. Приём работает, когда обе части неотрицательны.

Избавление от корня в знаменателе. 1/sqrt2 = sqrt2/2. Умножили числитель и знаменатель на sqrt2. Это не обязательное требование, но с таким видом проще сравнивать и складывать.

Типичные ошибки.

sqrt(9 + 16) = sqrt25 = 5, а sqrt9 + sqrt16 = 7. Корень из суммы не равен сумме корней. Я проверяю это на числах каждый раз, когда ученик сомневается.

sqrt(a^2) = a. Верно только при a >= 0. Если a отрицательно, получается |a|.

sqrt50 = 25sqrt2. Нет: 50 = 25 x 2, множитель 25 выходит из-под корня как 5.

Модуль и прикидка

Модуль — расстояние от числа до нуля. Он не бывает отрицательным.

|5| = 5; |-5| = 5; |0| = 0.

Выражение |a - b| — расстояние между точками a и b на прямой. Поэтому |3 - 8| = 5, и порядок вычитания не важен: |8 - 3| тоже 5.

Уравнение с модулем. |x| = 5 даёт два корня: 5 и -5. Один ответ здесь считается неполным.

Пример. |x - 2| = 3. Расстояние от x до 2 равно 3, значит x = 5 или x = -1. Через уравнение: x - 2 = 3 или x - 2 = -3.

Пример. |-7| - |3 - 8| = 7 - 5 = 2.

Неравенство треугольника. |a + b| <= |a| + |b|. Проверка: |3 + (-5)| = 2, а |3| + |-5| = 8. Равенство бывает при одинаковых знаках или когда одно из чисел равно нулю.

Прикидка. Иногда точное значение не нужно. Нужно понять, между какими числами лежит ответ.

sqrt37: 6^2 = 36, 7^2 = 49. Значит, 6 < sqrt37 < 7, причём значение чуть больше 6.

sqrt54: 7^2 = 49, 8^2 = 64. Значит, 7 < sqrt54 < 8, ближе к 7.

sqrt150: 12^2 = 144, 13^2 = 169. Значит, 12 < sqrt150 < 13.

Сравнение с десятичной дробью. Сравним sqrt10 и 3,2. Возводим 3,2 в квадрат: 10,24. Так как 10 < 10,24, получаем sqrt10 < 3,2.

Оценка произведения. 4,9 x 6,1 — это примерно 5 x 6 = 30. Точный ответ 29,89, но для выбора варианта хватает прикидки.

Границы. Если требуется ответ с точностью до целого, я сначала определяю два соседних целых числа, между которыми лежит результат. Это защищает от ответа «6,08» там, где просят целое.

Типичная ошибка. Считают, что sqrt37 ~= 6, и округляют вниз. Корень больше 6, потому что 37 больше 36. Прикидка должна сохранять направление неравенства.

Формулы сокращённого умножения

Семь формул. Первые три нужны постоянно, остальные — реже.

(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;

(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;

a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);

(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;

(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;

a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);

a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).

Как узнать формулу. Смотрю на структуру, а не на буквы. Три слагаемых, два из них квадраты, среднее удвоенное произведение — квадрат суммы или разности. Два квадрата, соединённых минусом, — разность квадратов.

Пример. (x + 3)^2 - (x - 3)^2. Раскрываем: x^2 + 6x + 9 - x^2 + 6x - 9 = 12x. Быстрее через разность квадратов: ((x + 3) - (x - 3))((x + 3) + (x - 3)) = 6 x 2x = 12x.

Пример. a^2 - b^2 при a = 7, b = 3: 49 - 9 = 40. Или (7 - 3)(7 + 3) = 40.

Пример. (2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9. Средний член не забываем: 2 x 2x x 3 = 12x.

Пример. (3a - 4b)^2 = 9a^2 - 24ab + 16b^2. Оба квадрата положительны, минус только у среднего члена.

Пример. (5 - x)(5 + x) = 25 - x^2.

Пример. x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2. Здесь формула читается справа налево.

Пример. 4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2. Проверка: (2x)^2 = 4x^2, 3^2 = 9, 2 x 2x x 3 = 12x.

Пример. (a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab.

Пример. x^2 + 6x + 9 при x = 97. Замечаем квадрат суммы: (x + 3)^2 = 100^2 = 10 000. Считать 97^2 в столбик можно, но зачем?

Типичные ошибки.

(a + b)^2 = a^2 + b^2. Нет. Проверка на числах: (2 + 3)^2 = 25, а 2^2 + 3^2 = 13.

a^2 - b^2 = (a - b)^2. Нет. (5 - 3)^2 = 4, а 5^2 - 3^2 = 16.

Потеряли знак среднего члена: (a - b)^2 = a^2 - 2ab - b^2. Нет: последний член положителен, (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.

Разложение на множители

Три инструмента: общий множитель, формула, группировка. Порядок именно такой.

Общий множитель. 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2). Сначала вынесли 3, потом применили разность квадратов.

x^2 + 5x = x(x + 5).

x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2).

Формула. 2x^2 - 8x + 8 = 2(x^2 - 4x + 4) = 2(x - 2)^2.

2a^2 - 8b^2 = 2(a^2 - 4b^2) = 2(a - 2b)(a + 2b).

Группировка. ac + bc + ad + bd = c(a + b) + d(a + b) = (a + b)(c + d).

Группировка с формулой. x^2 + 6x + 9 - y^2 = (x + 3)^2 - y^2 = (x + 3 - y)(x + 3 + y).

Зачем раскладывать. В задании 6 — чтобы сократить дробь или увидеть квадрат. В задании 20 — чтобы решить уравнение. Разложение почти всегда промежуточный шаг, а не финальный ответ.

Типичные ошибки.

Вынесли множитель только из первого слагаемого: 3x^2 - 12 = 3x(x - 4). Проверка: 3x(x - 4) = 3x^2 - 12x, а не 3x^2 - 12.

Остановились на полпути: 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4). Формально это разложение, но не до конца. Я требую доводить до конца.

Перепутали сумму кубов с разностью квадратов: a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2). Нет: вторая скобка выглядит как a^2 - ab + b^2.

Алгебраические дроби

Сокращение дроби — то же разложение, только применённое к числителю и знаменателю.

Пример. (a^2 - 9)/(a + 3) = ((a - 3)(a + 3))/(a + 3) = a - 3, при a /= -3.

Пример. (x^2 - 4x)/(x^2 - 16) = (x(x - 4))/((x - 4)(x + 4)) = x/(x + 4), при x /= 4 и x /= -4.

Пример. (x^2 - 1)/(x^2 + 2x + 1) = ((x - 1)(x + 1))/((x + 1)^2) = (x - 1)/(x + 1), при x /= -1.

Сложение дробей. 1/a + 1/b = (a + b)/(ab). Общий знаменатель — произведение, если общего множителя нет.

Вычитание. 1/a - 1/(a + 1) = ((a + 1) - a)/(a(a + 1)) = 1/(a(a + 1)). Минус перед дробью относится ко всему числителю, поэтому скобки обязательны.

Умножение и деление. Правила те же, что у обыкновенных дробей: перемножаем числители и знаменатели, при делении переворачиваем вторую дробь.

Типичная ошибка. Сокращают слагаемые, а не множители. (x + 2)/(x + 4) не равно 2/4. Сокращать можно только множители, то есть то, что соединено умножением.

Вторая ошибка — забыть про ограничения. При сокращении на (a + 3) мы молча предполагаем, что a /= -3. В задании 6 это редко проверяют, а в задании 20 ограничение лучше выписать: оно входит в обоснование.

Значение выражения: когда подставлять

Правило одно: сначала упростить, потом подставлять. Подстановка в сырое выражение даёт большие числа и лишние ошибки.

Пример. Найдите (2x - 1)^2 при x = -3.

(2 x (-3) - 1)^2 = (-6 - 1)^2 = (-7)^2 = 49.

Если раскрыть формулу, получится 4x^2 - 4x + 1 = 36 + 12 + 1 = 49. Оба пути верны, первый короче.

Пример. 3a^2b при a = -2, b = 3.

3 x (-2)^2 x 3 = 3 x 4 x 3 = 36. Квадрат снимает минус, поэтому ответ положительный.

Пример. (x - 3)/(x + 1) при x = 0,5.

(0,5 - 3)/(0,5 + 1) = (-2,5)/1,5 = -5/3.

Пример. (a^2 - b^2)/(a + b) при a = 3,7, b = 1,3. Сначала сокращаем: a - b. Подстановка: 3,7 - 1,3 = 2,4. Без сокращения пришлось бы считать 13,69 - 1,69 и делить на 5.

Типичная ошибка. Подставляют отрицательное число без скобок: 3 x -2^2 x 3. Запись читается как 3 x (-(2^2)) x 3 = -36, а не 36. Скобки вокруг отрицательного числа обязательны.

Второй промах — подставить, не упростив. Например, (a^2 - 9)/(a + 3) при a = 5,2. Сокращение даёт a - 3 = 2,2 за пять секунд. Подстановка в исходную дробь — это 27,04 - 9 и деление на 8,2. Считать можно, но риск больше.

Тренировка

1. Найдите значение выражения: 2,4 x 0,15 + 3,6.
2. Вычислите: 5/6 - 3/4.
3. Вычислите: (2/3)^2 x 9/8.
4. Найдите значение выражения: 3^-^2.
5. Упростите: sqrt75 - sqrt27.
6. Сравните: 2sqrt6 и 5.
7. Вычислите: 12 : 3 x 2 + 5.
8. Вычислите: 8 - 2 x 3^2.
9. Вычислите: (-3)^2 - 3^2.
10. Вычислите: 2 1/3 + 1 1/6.
11. Вычислите: (3/4 - 1/2) x 8.
12. Вычислите: 4,8 : 0,6 + 2,7 x 3.
13. Вычислите: 0,3^2 + 0,4^2.
14. Найдите значение выражения: (2/5)^-^2.
15. Вычислите: 5^0 + 5^-^1.
16. Найдите значение выражения: 4^3 x 2^5.
17. Вычислите: 9^2 : 3^3.
18. Вычислите: 25 x 5^-^3.
19. Упростите: sqrt98 - sqrt50.
20. Найдите значение выражения: (sqrt7 - 2)(sqrt7 + 2).
21. Сравните: sqrt10 и 3,2.
22. Между какими целыми числами лежит sqrt54?
23. Вычислите: |-7| - |3 - 8|.
24. Упростите: (a - 4)(a + 4) - a^2.
25. Упростите: (x - 5)(x + 5) - (x - 3)^2.
26. Разложите на множители: 4x^2 - 20x + 25.
27. Разложите на множители: 16a^2 - 24a + 9.
28. Разложите на множители: 3x^2 - 12.
29. Найдите значение выражения (a^2 - 9)/(a + 3) при a = 5,2.
30. Найдите (x + y)^2, если x - y = 3 и xy = 4.
31. Упростите: (a + b)^2 - (a - b)^2.
32. Запишите в стандартном виде: 0,00052.
33. Стороны прямоугольника относятся как 2:5, периметр 42. Найдите площадь.
34. Вычислите: (6,4 x 10^5) : (1,6 x 10^3).

Ответы

1. 0,36 + 3,6 = 3,96.
2. 10/12 - 9/12 = 1/12.
3. 4/9 x 9/8 = 1/2 = 0,5.
4. 1/9.
5. 5sqrt3 - 3sqrt3 = 2sqrt3.
6. (2sqrt6)^2 = 24, 5^2 = 25, значит 2sqrt6 < 5.
7. 4 x 2 + 5 = 13.
8. 8 - 18 = -10.
9. 9 - 9 = 0.
10. 14/6 + 7/6 = 21/6 = 3,5.
11. 1/4 x 8 = 2.
12. 8 + 8,1 = 16,1.
13. 0,09 + 0,16 = 0,25.
14. (5/2)^2 = 25/4 = 6,25.
15. 1 + 0,2 = 1,2.
16. 2^6 x 2^5 = 2^1^1 = 2048.
17. 3^4 : 3^3 = 3.
18. 5^2 x 5^-^3 = 5^-^1 = 0,2.
19. 7sqrt2 - 5sqrt2 = 2sqrt2.
20. 7 - 4 = 3.
21. 3,2^2 = 10,24, значит sqrt10 < 3,2.
22. 7^2 = 49, 8^2 = 64, значит 7 < sqrt54 < 8.
23. 7 - 5 = 2.
24. a^2 - 16 - a^2 = -16.
25. x^2 - 25 - (x^2 - 6x + 9) = 6x - 34.
26. (2x - 5)^2.
27. (4a - 3)^2.
28. 3(x - 2)(x + 2).
29. (a - 3)(a + 3)/(a + 3) = a - 3 = 2,2.
30. (x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy = 9 + 16 = 25.
31. 4ab.
32. 5,2 x 10^-^4.
33. Полупериметр 21, частей 7, одна часть 3. Стороны 6 и 15, площадь 90.
34. (6,4 : 1,6) x 10^2 = 4 x 100 = 400.

Чек-лист главы

Порядок действий: скобки, степени, умножение и деление слева направо, сложение и вычитание.

Минус перед скобкой меняет знаки у всех слагаемых.

Дробная черта держит скобки в числителе и знаменателе.

Дроби: общий знаменатель при сложении, переворот при делении, неправильные дроби для смешанных чисел.

Десятичные: запятая под запятой, количество знаков при умножении.

Отрицательная степень — это дробь, а не отрицательное число.

Корень из суммы считают по-другому: sqrt(9 + 16) /= sqrt9 + sqrt16; при этом sqrt(a^2) = |a|.

Модуль — расстояние, он неотрицателен.

Формулы сокращённого умножения проверяйте на числах.

Разложение на множители: общий множитель, формула, группировка.

Перед подстановкой упрощайте выражение, отрицательные числа берите в скобки.

Я не обещаю, что после этой главы вы полюбите дроби. Но если вы прорешаете тренировку дважды — первый раз с подсказками, второй на время, — задание 6 перестанет быть лотереей. Это самый честный балл на экзамене: он зависит только от вас и от количества повторений.

Глава 4. Уравнения и неравенства

Задания 7, 8 и 20 — три ступени одной темы. Седьмое и восьмое проверяют, умеете ли вы решить уравнение и неравенство. Двадцатое — можете ли записать решение так, чтобы эксперт поставил два балла.

Тема большая, но конструкций в ней немного. Они повторяются из года в год. Разберите их по очереди, и хаос превратится в список.

На экзамене задания 7 и 8 части 1 дают по одному баллу и требуют 3–4 минут каждое. Задание 20 части 2 стоит два балла, и на него разумно оставить 15–20 минут. Время лучше считать заранее, а не выяснять в конце, что его не осталось.

Линейное уравнение

Общий вид: ax + b = 0. Решение: x = -b/a, если a /= 0.

Если a = 0 и b = 0, решений бесконечно много: подходит любое число. Если a = 0 и b /= 0, решений нет.

Пример из демоверсии: 3(x + 8) - 2(x - 8) = 8.

Раскрываем скобки: 3x + 24 - 2x + 16 = 8. Обратите внимание на вторую скобку: минус перед ней меняет знаки, поэтому -2 x (-8) = +16.

Приводим подобные: x + 40 = 8. Значит, x = 8 - 40 = -32.

Проверка: 3(-32 + 8) - 2(-32 - 8) = 3 x (-24) - 2 x (-40) = -72 + 80 = 8. Верно.

Уравнение с дробями решается так же, только сначала избавляются от знаменателей. Пример: (x - 1)/2 + (x + 2)/3 = 5. Общий знаменатель 6. Умножаем каждое слагаемое: 3(x - 1) + 2(x + 2) = 30. Раскрываем: 3x - 3 + 2x + 4 = 30. Получаем 5x + 1 = 30, откуда x = 29/5 = 5,8.

Типичная ошибка. При раскрытии второй скобки пишут -2x - 16. Знак теряется, ответ уезжает. Подчёркивайте каждое слагаемое после раскрытия.

Квадратное уравнение

Общий вид: ax^2 + bx + c = 0, a /= 0.

Дискриминант: D = b^2 - 4ac.

D > 0 — два корня;

D = 0 — один корень;

D < 0 — корней нет.

Корни: x = (-b +/- sqrtD) / (2a).

Пример: 2x^2 - 7x + 3 = 0. D = 49 - 24 = 25. sqrtD = 5. x_1 = (7 + 5)/4 = 3; x_2 = (7 - 5)/4 = 0,5.

Неполные уравнения. Если b = 0: ax^2 + c = 0. Если c = 0: ax^2 + bx = 0, выносим x за скобку.

Пример: 3x^2 - 12 = 0 -> x^2 = 4 -> x = +/-2. Не забывайте второй корень.

Пример: x^2 + 5x = 0 -> x(x + 5) = 0 -> x = 0 или x = -5.

Ещё несколько случаев, чтобы формула не казалась единственным путём.

x^2 - 8x + 15 = 0. D = 64 - 60 = 4. Корни: (8 +/- 2)/2 = 5 и 3.

2x^2 + 5x - 3 = 0. D = 25 + 24 = 49. Корни: (-5 +/- 7)/4 = 0,5 и -3.

x^2 + 4x + 4 = 0. D = 16 - 16 = 0. Один корень: -2.

3x^2 + x + 2 = 0. D = 1 - 24 = -23. Корней нет.

4x^2 = 25. x^2 = 25/4, x = +/-5/2 = +/-2,5. В последнем примере часто пишут только 2,5. Но уравнение имеет два корня: проверка показывает, что (-2,5)^2 = 6,25 и (2,5)^2 = 6,25.

Выделение полного квадрата. Иногда формула нужна не для ответа, а чтобы увидеть структуру. Пример: x^2 - 6x + 5 = 0. Представим левую часть как (x - 3)^2 - 4. Тогда (x - 3)^2 = 4, откуда x - 3 = +/-2 и x = 5 или 1. Тот же ответ, что по дискриминанту, но видно, что выражение — сдвинутая парабола. Этот приём пригодится в главе о графиках.

Теорема Виета. Для приведённого уравнения x^2 + px + q = 0: сумма корней равна -p, произведение равно q.

Пример: x^2 - 7x + 12 = 0. Корни 3 и 4: сумма 7, произведение 12.

Пример: x^2 - 11x + 30 = 0. Нужны два числа, сумма 11, произведение 30. Это 5 и 6.

Пример: x^2 + 3x - 10 = 0. Сумма -3, произведение -10. Числа -5 и 2.

Виета экономит время, когда корни целые. Если дискриминант некрасивый, считайте формулой.

Полезное свойство. Если a + b + c = 0, один корень равен 1, второй c/a. Например, 2x^2 - 5x + 3 = 0: 2 - 5 + 3 = 0, корни 1 и 1,5. Это ускоряет проверку.

Типичная ошибка. Забывают минус перед b. Формула x = (-b +/- sqrtD)/(2a), а не (b +/- sqrtD)/(2a). Проверяйте на простом примере: x^2 - 5x + 6 = 0, корни 2 и 3. Подстановка в формулу с минусом даёт (5 +/- 1)/2 = 3 и 2. Без минуса — (-5 +/- 1)/2 = -2 и -3. Неверно.

Дробно-рациональное уравнение

Главное — область допустимых значений. Знаменатель не равен нулю.

Пример: (x + 1)/(x - 2) = 3.

Условие: x /= 2. Умножаем обе части на x - 2: x + 1 = 3(x - 2). Раскрываем: x + 1 = 3x - 6. Отсюда -2x = -7, x = 3,5. Корень не равен 2, значит подходит.

Пример: 3/(x - 1) = 2. ОДЗ: x /= 1. 3 = 2x - 2, x = 2,5. Подходит.

Пример: (x + 2)/(x - 3) = 0. Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен. x = -2. Подходит.

Ещё пример: 1/(x^2 - 1) = 1/(x - 1). ОДЗ: x /= +/-1. Умножаем на x^2 - 1: 1 = x + 1, откуда x = 0. Корень не совпадает с запрещёнными значениями, значит подходит.

Пример посложнее: 1/(x - 2) + 1/(x + 2) = 4/(x^2 - 4). ОДЗ: x /= +/-2.

Приводим к общему знаменателю x^2 - 4: (x + 2) + (x - 2) = 4. Получаем 2x = 4, x = 2. Но x = 2 не входит в ОДЗ. Значит, корней нет.

Типичная ошибка. Нашли корень, который обращает знаменатель в ноль, и не отбросили его. Это стоит балла. Всегда выписывайте ОДЗ до решения.

Система уравнений

Два основных способа: подстановка и сложение. Третий — графический — помогает понять картину, но точный ответ даёт редко.

Подстановка. Из одного уравнения выражаем переменную, подставляем в другое.

Пример: x + y = 5; xy = 6. Из первого y = 5 - x. Тогда x(5 - x) = 6 -> 5x - x^2 = 6 -> x^2 - 5x + 6 = 0 -> x = 2 или x = 3. Тогда y = 3 или y = 2. Ответ: (2; 3) и (3; 2).

Сложение. Если коэффициенты при одной переменной противоположны, складываем уравнения.

Пример: 2x + y = 7; 3x - y = 3. Складываем: 5x = 10, x = 2. Тогда y = 3.

Пример, где после подстановки получается квадратное уравнение: x^2 + y^2 = 25; x + y = 7. Из второго y = 7 - x. Подставляем: x^2 + (7 - x)^2 = 25 -> x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25 -> 2x^2 - 14x + 24 = 0 -> x^2 - 7x + 12 = 0 -> x = 3 или x = 4. Тогда y = 4 или y = 3. Ответ: (3; 4) и (4; 3).

Графический способ. Строим два графика и смотрим точки пересечения. Пример: y = x + 1 и y = -x + 5. Прямые пересекаются при x = 2, y = 3. Ответ: (2; 3).

Графический способ хорош, когда уравнения неудобно преобразовывать. Но если точка не целая, ответ получается приблизительным. На экзамене нужен точный, поэтому координаты всё равно подставляют в оба уравнения.

Типичная ошибка. Потеря второго решения. В системе с произведением почти всегда две пары. Проверяйте, не симметричны ли уравнения. Вторая ошибка — построили графики, увидели точку и записали ответ без проверки.

Линейное неравенство

Решается как уравнение, но с одним отличием: при умножении или делении на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный.

Пример: -3x + 4 > 10. Переносим: -3x > 6. Делим на -3: x < -2.

Типичная ошибка. Забыли перевернуть знак. Это самая частая ошибка в теме. Проговорите правило вслух перед решением: «делю на минус — переворачиваю».

Запись ответа. Если решение x < -2, на прямой штрихуем левее -2, точка выколотая. В ответе: (-inf; -2).

Если неравенство нестрогое, x <= -2, точка закрашенная, ответ (-inf; -2].

Проверить ответ просто: возьмите число из найденного промежутка и подставьте. Для x < -2 подойдёт -3: -3 x (-3) + 4 = 13 > 10, верно. И возьмите число снаружи, например 0: 4 > 10 неверно. Если обе проверки сошлись, знак выбран правильно.

Отдельно запомните два случая, которые часто путают.

Неравенство x > 5 и x < 2 одновременно выполняться не могут: решений нет.

Неравенство x >= -5 и x <= 3 даёт отрезок [-5; 3].

Система неравенств

Решаем каждое отдельно, потом ищем пересечение.

Пример из демоверсии:

x + 3 >= -2,

x + 1,1 >= 0.

Первое: x >= -5. Второе: x >= -1,1. Пересечение: x >= -1,1. Ответ: [-1,1; +inf).

На прямой рисуем две штриховки и смотрим, где они накладываются. Если одна штриховка идёт вправо от -5, а другая вправо от -1,1, общая часть — вправо от -1,1.

Если знаки разные. x >= -5 и x <= 3. Пересечение: [-5; 3].

Если пересечения нет. x > 5 и x < 2. Решений нет.

Пример с дробными коэффициентами: x/2 + 1 > 0 и 3 - x >= 0. Первое даёт x > -2, второе x <= 3. Пересечение: (-2; 3].

Типичная ошибка. Пишут объединение вместо пересечения. В системе выполняются оба условия одновременно, значит нужна общая часть, а не сумма промежутков.

Метод интервалов

Для неравенств вида (x - a)(x - b) > 0 или дробей.

Алгоритм:

1. Найти нули числителя и знаменателя.
2. Отметить их на прямой. Нули знаменателя — всегда выколотые.
3. Определить знак выражения на одном промежутке.
4. Расставить знаки по чередованию.
5. Выбрать нужные промежутки.

Пример: (x - 1)(x + 3) < 0.

Нули: 1 и -3. Наносим на прямую. Берём пробную точку x = 0: (0 - 1)(0 + 3) = -3 < 0. Значит, на промежутке (-3; 1) знак минус. На остальных — плюс. Ответ: (-3; 1).

Пример с дробью: (x - 3)/(x + 1) <= 0. Нуль числителя 3 входит в ответ, нуль знаменателя -1 выколот. Знак на (3; +inf): при x = 4 получаем 1/5 > 0. Чередуем: (-1; 3) минус, (-inf; -1) плюс. Нужен знак <= 0, значит ответ (-1; 3].

Пример с тремя множителями: (x - 1)(x + 2)(x - 4) < 0. Нули: 1, -2, 4. На промежутке (4; +inf) все множители положительны, знак плюс. Чередуем влево: (1; 4) минус, (-2; 1) плюс, (-inf; -2) минус. Нужен минус: (-inf; -2) U (1; 4).

Кратность корня. Если множитель в квадрате, знак при переходе через точку не меняется. Например, (x - 2)^2(x + 1) > 0. В точке 2 знак сохраняется. Проверим: при x = 0 выражение 4 x 1 = 4 > 0, при x = 3 тоже 4 > 0, при x = -2 получаем 16 x (-1) = -16 < 0. Значит, ответ (-1; 2) U (2; +inf). Точка 2 выколота, потому что при x = 2 выражение равно нулю, а неравенство строгое.

Квадратные неравенства

Квадратное неравенство — это ax^2 + bx + c > 0 (или <, >=, <=). Решают его через параболу: находят корни, отмечают их на прямой и смотрят, где график выше или ниже оси.

Если a > 0, ветви параболы направлены вверх. Между корнями выражение отрицательно, снаружи — положительно.

Пример: x^2 - 5x + 6 > 0. Корни 2 и 3. Парабола выше оси снаружи отрезка [2; 3]. Ответ: (-inf; 2) U (3; +inf).

Пример: x^2 - 5x + 6 <= 0. Тот же график, но нужна часть ниже оси или на оси. Ответ: [2; 3].

Если корней нет, парабола не пересекает ось. При a > 0 она целиком выше оси. Значит, x^2 + 2x + 5 > 0 верно при любом x, а x^2 + 2x + 5 < 0 не имеет решений.

Если D = 0, парабола касается оси в одной точке. Например, x^2 - 4x + 4 >= 0 верно при всех x, потому что (x - 2)^2 неотрицательно. А x^2 - 4x + 4 > 0 верно при всех x, кроме 2.

Знак перед x^2. Если a < 0, умножьте неравенство на -1 и переверните знак. Пример: -x^2 + 3x + 4 >= 0. Умножаем на -1: x^2 - 3x - 4 <= 0. Корни -1 и 4. Ответ: [-1; 4].

Типичная ошибка. Извлекают корень из обеих частей: x^2 < 9 -> x < 3. Это неверно. Правильно: -3 < x < 3. Квадратное неравенство нельзя решать как линейное.

Задание 20: неравенство с дробью

Разберём демоверсию 2027 года: x <= 9/x.

Это задание второй части. Оно стоит два балла и требует записи решения.

Шаг 1. ОДЗ. x /= 0.

Шаг 2. Переносим всё в левую часть. x - 9/x <= 0.

Шаг 3. Приводим к общему знаменателю. (x^2 - 9)/x <= 0.

Шаг 4. Раскладываем числитель. (x - 3)(x + 3)/x <= 0.

Шаг 5. Метод интервалов. Нули числителя: 3 и -3. Нуль знаменателя: 0. Нули числителя входят, потому что неравенство нестрогое. Нуль знаменателя выколот всегда.

Наносим на прямую: -3, 0, 3. Определяем знак на промежутке (3; +inf): берём 4, получаем (1 x 7)/4 > 0. Значит, плюс. Дальше чередуем: (0; 3) минус, (-3; 0) плюс, (-inf; -3) минус.

Нам нужен знак <= 0. Это промежутки (-inf; -3] и (0; 3].

Ответ: (-inf; -3] U (0; 3].

Второй пример, чтобы закрепить схему: (x^2 - 4)/(x - 1) >= 0.

ОДЗ: x /= 1. Числитель раскладывается: (x - 2)(x + 2). Нули числителя -2 и 2 входят, нуль знаменателя 1 выколот. На промежутке (2; +inf) выражение положительно. Чередуем: (1; 2) минус, (-2; 1) плюс, (-inf; -2) минус. Нужен знак >= 0: [-2; 1) U [2; +inf).

Проверка: x = 0 даёт (-4)/(-1) = 4 >= 0, подходит. x = 1,5 даёт (2,25 - 4)/0,5 = -3,5 < 0, не подходит. x = 3 даёт 5/2 = 2,5 >= 0, подходит.

Что писать в бланке. Не только ответ. Показать ОДЗ, приведение к общему знаменателю, разложение, знаки на прямой. Эксперт должен видеть метод, а не догадку.

Я требую от учеников такой структуры:

1. «ОДЗ: ...» — одной строкой.
2. Перенос всех слагаемых в левую часть.
3. Приведение к общему знаменателю.
4. Разложение на множители.
5. «Нули числителя: ...; нуль знаменателя: ...».
6. Рисунок прямой со знаками.
7. Ответ промежутками.

Семь строк. За них дают два балла. Без рисунка могут снять один, потому что не видно метода.

Типичная ошибка. Умножают обе части на x и получают x^2 <= 9, забывая, что при отрицательном x знак неравенства меняется. Это грубая ошибка, которая сразу даёт ноль. Дробь нельзя умножать на переменную, пока не знаешь её знак. Только перенос и общий знаменатель.

Уравнения с модулем

В ОГЭ встречаются редко, но могут появиться в задании 20.

|x| = 5 -> x = 5 или x = -5.

|x - 2| = 3 -> x - 2 = 3 или x - 2 = -3 -> x = 5 или x = -1.

|x| = -3 -> решений нет, модуль неотрицателен.

Простые неравенства с модулем решаются через расстояние. |x| < 3 означает, что расстояние от x до нуля меньше 3: -3 < x < 3. |x| > 3 даёт два луча: x < -3 или x > 3.

Пример: |2x - 1| <= 5. Двойное неравенство: -5 <= 2x - 1 <= 5. Прибавляем 1: -4 <= 2x <= 6. Делим на 2: -2 <= x <= 3. Ответ: [-2; 3].

Пример с двумя модулями: |x - 1| + |x + 3| = 6. Разбиваем прямую на промежутки точками -3 и 1. При x <= -3 оба выражения под модулем неположительны: -(x - 1) - (x + 3) = 6 -> -2x - 2 = 6 -> x = -4. Корень входит в промежуток. При -3 < x < 1 получаем -(x - 1) + (x + 3) = 4, а нужно 6 — решений нет. При x >= 1: (x - 1) + (x + 3) = 6 -> 2x + 2 = 6 -> x = 2. Ответ: -4 и 2.

Типичная ошибка. Забывают второй случай. Модуль — это расстояние, а на расстоянии 3 от точки 2 есть две точки.

Уравнение с параметром

Простые параметры встречаются в задании 20.

Пример. При каких a уравнение ax = 5 имеет единственное решение?

Если a /= 0, решение x = 5/a. Если a = 0, уравнение 0 = 5 не имеет решений. Значит, единственное решение при a /= 0.

Пример. При каких a уравнение (a - 2)x = 3 не имеет решений?

Если a = 2, получаем 0 = 3 — решений нет. При a /= 2 решение есть. Ответ: a = 2.

Пример посложнее. При каких a уравнение (a^2 - 4)x = a - 2 имеет бесконечно много решений?

Если a^2 - 4 /= 0, решение единственное: x = (a - 2)/(a^2 - 4) = 1/(a + 2). Если a = 2, получаем 0 = 0 — подходит любое x, решений бесконечно много. Если a = -2, получаем 0 = -4 — решений нет. Ответ: a = 2.

Типичная ошибка. Делят на a, не проверяя случай a = 0. Именно этот случай чаще всего и спрашивают.

Проверка корней

После решения уравнения подставьте корень в исходное выражение. Это занимает полминуты и спасает балл.

Особенно важно проверять дробные уравнения, уравнения с корнем, уравнения после возведения в квадрат и уравнения с модулем.

Пример: sqrt(x + 2) = x. Возводим в квадрат: x + 2 = x^2 -> x^2 - x - 2 = 0 -> x = 2 или x = -1. Проверяем: при x = -1 левая часть sqrt1 = 1, правая -1. Не равно. Корень -1 посторонний. Ответ: 2.

Второй пример: sqrt(x + 6) = x. После возведения в квадрат: x + 6 = x^2 -> x^2 - x - 6 = 0 -> x = 3 или -2. При x = -2 левая часть sqrt4 = 2, правая -2. Не подходит. Ответ: 3.

Типичная ошибка. Не проверили и записали оба корня. За это снимают балл.

Проверка не заменяет ОДЗ. Сначала выписываем ограничения, потом решаем, потом проверяем. Если корень не входит в ОДЗ, его отбрасывают даже без подстановки. Если входит — подставляем и убеждаемся, что равенство верное.

Текстовые задачи

В части 2 часто встречается задача на движение, работу или смеси. Принцип один: обозначить неизвестное, выразить через него остальные величины, составить уравнение.

Пример. Велосипедист проехал 24 км с одной скоростью, а обратно — со скоростью на 2 км/ч меньше, затратив на обратный путь на 1 час больше. Найдите исходную скорость.

Пусть скорость туда v км/ч. Время туда 24/v. Время обратно 24/(v - 2). Разница 1 час.

24/(v - 2) - 24/v = 1.

Умножаем на v(v - 2): 24v - 24(v - 2) = v(v - 2). Получаем 48 = v^2 - 2v -> v^2 - 2v - 48 = 0. Корни 8 и -6. Скорость не может быть отрицательной, значит v = 8 км/ч.

Проверка: туда 24/8 = 3 часа, обратно 24/6 = 4 часа, разница 1 час. Сходится.

Иногда одной переменной не хватает, и составляют систему. Пример. Расстояние между городами 300 км. Автомобиль и автобус выехали навстречу. Скорость автомобиля на 20 км/ч больше. Встретились через 3 часа. Найдите скорости.

Пусть v — скорость автобуса, u — автомобиля. Тогда u = v + 20. Встреча: 3(v + u) = 300, то есть v + u = 100. Подставляем u: 2v + 20 = 100, v = 40, u = 60.

Проверка: 3 x (40 + 60) = 300. Сходится.

Типичная ошибка. Забывают, что при движении навстречу скорости складываются. И не проверяют, подходит ли корень по смыслу: отрицательная скорость или отрицательное время ответом быть не могут.

Как выбрать метод решения

1. Если уравнение линейное — раскрыть скобки, привести подобные.
2. Если квадратное — дискриминант или Виета.
3. Если дробное — ОДЗ, общий знаменатель, проверка.
4. Если система — подстановка или сложение.
5. Если неравенство — прямая, интервалы.

Не начинайте с самого сложного метода. Посмотрите на структуру. Часто ответ виден после одного преобразования.

На черновике пишите коротко: преобразование — результат. Не переписывайте каждую строчку в чистовик, но в задании 20 чистовое оформление обязательно: там оценивают ход решения, а не только ответ.

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «Литрес».

Прочитайте эту книгу целиком, купив полную легальную версию на Литрес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.